МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Е. Г. Скляренко

Курс лекций по классической дифференциальной геометрии

Москва, июль 2008 г.

Содержание

Предисловие

Настоящее издание основано на материалах лекций по курсу "Классическая дифференциальная геометрия неоднократно читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ студентам-математикам второго года обучения.

В отличие от электронных вариантов, оформлявшихся инициативными студентами в разное время (наиболее распространённым оказался основанный на лекционном курсе 2002 года), материал в настоящем издании распределён не по лекциям (тем более, что такое распределение раз от раза изменялось), а по тематическим признакам. При этом преследовалась цель не только ликвидировать ошибки и пробелы, допускавшиеся в указанных "пробных" вариантах, но и представить весь материал, хотя и в сокращённом по сравнению с лекциями виде, максимально наглядным, а само изложение - неформальным, лаконичным и предельно простым как в отношении доказательств утверждений, так и в подаче представляемых понятий и обосновании основных геометрических идей.

Большая заслуга в подготовке первоначального текста лекций принадлежала студентам М. Потериной, К. Никитину, В. Курбаеву, Ю. Малыхину и Ю. Притыкину, а также Ю. Кудряшову - советы по оформлению TeX-ификации текста и типографскому набору. В дальнейшем ряд полезных изменений в текст внёс С. Шашков.

После ознакомления с электронным вариантом автором была проведена тщательная обработка текста в целом, заполнен ряд лакун, исправлены неточности в формулировках некоторых утверждений, восстановлены логически незавершённые доказательства. Большую помощь в электронном оформлении окончательного текста оказал аспирант кафедры высшей геометрии и топологии Д. Артамонов.

Автор искренне признателен всем, благодаря участию которых удалось осущесвить появление этого издания.

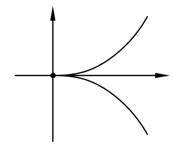
Е.Г. Скляренко.

1. Введение. Основные понятия

1.1. Гладкие кривые

Гладкая кривая — одно из основных понятий нашего курса. Прежде, чем дать определение, рассмотрим прямую $r(t) = r_0 + \vec{v}t$, где $\vec{v} \neq 0$. Можно было бы определить кривую, например, так: гладкая кривая — это кривая, заданная радиус-вектором $r(t)$, т.е. системой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (1)$$



где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — гладкие функции. Однако такое определение не годится: рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнениями $r(t) = \left(t^2, t^3\right)$. Мы видим, что в точке $t = 0$ эта кривая не гладкая.

Определение. Фигура $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ является *гладкой кривой*, если для любой точки на кривой найдётся такая окрестность этой точки, в которой γ можно задать гладкой функцией $r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, и $v = \dot{r} \neq 0$ при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

В примере, написанном выше, имеем $\dot{r} = (2t, 3t^2)$ и $\dot{r}(0) = 0$.

Замечание. Гладкость кривой не зависит от системы координат, в которой она задана. Наше определение корректно, потому что в нём мы использовали только гладкость функции и то, что вектор скорости не равен нулю, а эти понятия от системы координат не зависят.

Определение. Вектор скорости кривой $\dot{r}(t)$ называется *касательным вектором.*

Посмотрим, что изменится, если мы в уравнении кривой изменим параметр t и зададим кривую функцией $r = r(\tau)$.

Теорема 1.1. *Если параметризовать гладкую кривую $r = r(t)$ параметром τ, то $t = t(\tau)$ и $\tau = \tau(t)$ — взаимно обратные гладкие функции.*

□ В определении гладкой кривой мы имеем, что вектор $v = \dot{r}(t) \neq 0$, и без ограничения общности можно считать, что $\dot{x}(t) \neq 0$. Значит, по теореме об обратной функции существует гладкая функция $t = t(x)$. Поскольку по определению гладкой кривой $x = x(\tau)$ также гладкая функция, то и их композиция $t = t(x) = t(x(\tau)) = t(\tau)$ тоже будет гладкой функцией. По симметричным соображениям $\tau = \tau(t)$ также будет гладкой. Покажем, что $t'_\tau \neq 0$. В самом деле, если бы это было не так, то $\dot{r}(\tau) = \dot{r}(t(\tau))t'_\tau = 0$, а это противоречит условию $\dot{r}(\tau) \neq 0$. По теореме о производной обратной функции $t'_\tau = \frac{1}{\tau'_t}$. ■

Следствие 1.2. *Пусть v — касательный вектор кривой $r = r(t)$. Тогда касательный вектор при параметре τ будет равен $\widetilde{v}(\tau) = \dot{r}(\tau) = \dot{r}(t(\tau))t'_\tau = v \cdot t'_\tau$, т. е. будет коллинеарен вектору v.*

Определение. *Касательная прямая* к кривой $r = r(t)$ в точке t_0 — это прямая $l(t) = r(t_0) + \dot{r}(t_0)t$.

В силу следствия, касательная прямая не зависит от выбора параметризации, т. к. касательные вектора при разных параметризациях будут коллинеарны, и касательные прямые совпадут.

В дальнейшем через r_0 будем обозначать точку на кривой в момент времени t_0, а $\Delta r := r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$. Вектором v часто будем обозначать касательный вектор $\dot{r}$.

Теорема 1.3. *Расстояние от точек кривой до касательной является величиной 2-го порядка малости от Δt. Касательная прямая — это единственная прямая с таким свойством.*

□ Рассмотрим кривую $r = r(t)$. По формуле Тейлора имеем $\Delta r = v\Delta t + \widetilde{R}$, где $\widetilde{R}$ — члены ряда порядка $\geqslant 2$. Возьмем произвольную прямую $l(t) = r_0 + at$, где $|a| = 1$. Расстояние от точки $r_0 + \Delta r$ на кривой до прямой равно $\big|[a, \Delta r]\big| = \big|[a, v]\Delta t + [a, \widetilde{R}]\big|$. Для того, чтобы это расстояние являлось величиной второго порядка малости от Δt, необходимо и достаточно, чтобы $[a, v] = 0$, т. е. векторы a и v коллинеарны. Но это и означает, что l задаёт касательную прямую. ■

1.2. Гладкие поверхности

Определение. *Гладкая поверхность* — это фигура, которая локально в каждой точке a_0 допускает описание гладкой функцией $r = r(u^1, u^2)$, где $r_0 = r(0, 0) = a_0$. При этом векторы $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}(0)$ и $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}(0)$ не коллинеарны. Заметим, что определение гладкой поверхности, как и гладкой кривой, не зависит от выбора системы координат.

В частности, плоскость задается гладкой функцией $r = r_0 + m_1u^1 + m_2u^2$, где m_1 и m_2 не коллинеарны.

Теорема 1.4. *Поверхность можно задать тремя эквивалентными способами:*

1. *Так, как в определении;*
2. *С помощью гладкой функции $z = f(x, y)$;*

3. С помощью гладкой неявной функции $F(x, y, z)$, для которой $\operatorname{grad} F \neq 0$.

□ $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Напишем два вектора m_1 и m_2 один под другим, получим матрицу

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Условие неколлинеарности векторов m_1 и m_2 эквивалентно тому, что $\operatorname{rk} A = 2$, т. е. в матрице есть минор, не равный нулю. Без ограничения общности,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

тогда существуют гладкие обратные функции $u^1 = u^1(x, y)$ и $u^2 = u^2(x, y)$. Следовательно, $z = z(u^1, u^2) = z\big(u^1(x, y), u^2(x, y)\big) = f(x, y)$, т. е. z — гладкая функция от x и y.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Положим $x = u^1$, $y = u^2$, $z = f(u^1, u^2)$. Тогда $m_1 = (1, 0, f_{u^1})$, а $m_2 = (0, 1, f_{u^2})$, и они, очевидно, неколлинеарны.

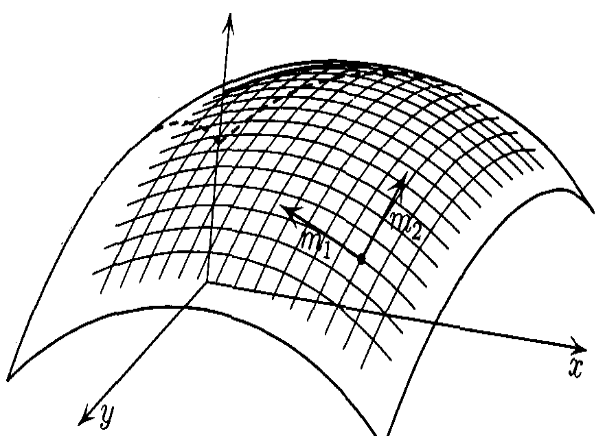
$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) := f(x, y) - z = 0$, тогда $\operatorname{grad} F = (f_x, f_y, -1) \neq 0$.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ Пусть $\operatorname{grad} F \neq 0$, тогда, без ограничения общности, $F_z \neq 0$. По теореме о неявной функции можно разрешить $F(x, y, z) = 0$ относительно z, т. е. $z = f(x, y)$. ■

1.3. Геометрический смысл параметров. Криволинейные координаты

Теорема 1.5. *Существует локальная биекция между точками поверхности и парами (u^1, u^2), т. е. $\{u^i\}$ есть локальные координаты на поверхности.*

□ Ясно, что каждой паре координат (u^1, u^2) соответствует точка поверхности. Это соответствие биективно в силу аргументов, использованных в теореме 1.3: $(x, y, z) \leftrightarrow \big(x, y, z(x, y)\big) \leftrightarrow (x, y) \leftrightarrow (u^1, u^2)$. ■



Определение.
Пусть $r = r(u^1, u^2)$. Зафиксируем координату u^2, тогда получим кривую $r = r(u^1, u^2_0) = r(u^1)$ на поверхности. Такие кривые называются u^1*-линиями.* Аналогично, зафиксировав координату u^1, получим u^2*-линию.* Совокупность всех этих линий называется *координатными линиями.*

Теорема 1.6. *Координатные линии «разных сортов» пересекаются, а линии «одного сорта» (при разных значениях зафиксированных параметров) не пересекаются и не касаются.*

□ Допустим, что две линии одного сорта имеют общую точку на поверхности. Но тогда этой точке будут соответствовать две пары координат, а это противоречит предыдущему утверждению. ■

1.4. Карта поверхности

Определение. *Картой поверхности* называется пара (U, φ), где U — область в $\mathbb{R}^2$, а отображение φ ставит в соответствие точке на поверхности с криволинейными координатами (u^1, u^2) точку с координатами (u^1, u^2) в области U. Как было доказано ранее, такое отображение биективно.

Теорема 1.7. *Гладкие кривые на поверхности переходят в гладкие кривые на карте. Пересечение переходит в пересечение, касание — в касание, касательный вектор $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ — в касательный вектор $(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$.*

□ Как мы знаем, существует биекция между точками карты (u^1, u^2) и точками поверхности. Она может быть описана формулами типа $u^1 = u^1\big(x, y\big)$ и $u^2 = u^2\big(x, y\big)$. Рассмотрим гладкую кривую $r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ на поверхности. Подставляя функции x, y в формулы для u^1 и u^2, получаем t-параметрическое задание гладкой кривой на карте - изображение $r(t)$.

Имеем координаты $(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ касательного вектора на карте. Имеем $v = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial r}{\partial u^2}\dot{u}^2 = m_1\dot{u}^1 + m_2\dot{u}^2$. Таким образом, касательный вектор v имеет в локальном базисе m_1, m_2 координаты $(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$, т. е. переходит в касательный вектор $(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ к кривой на карте. ■

Можно рассматривать несколько карт одной и той же поверхности. Установим связь между координатами одной и той же точки поверхности на разных картах.

Определение. *Диффеоморфизмом* областей U и V называется биективное отображение $f\colon U \to V$, такое что $f,\ f^{-1}$ — гладкие отображения.

Теорема 1.8. *Между областями двух карт $U(u^1, u^2)$ и $V(v^1, v^2)$, изображающими один и тот же фрагмент поверхности, существует диффеоморфизм. Матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$ есть матрица перехода от базиса $\{m_1, m_2\}$ к базису $\{m'_1, m'_2\}$, где $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$, а $m'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i}$. Матрица $I = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)$ будет матрицей обратной замены базиса.*

□ Первое утверждение очевидно, поскольку в соответсвии с аргументами, использованными в теореме 1.4, имеются диффеоморфизмы типа $(u^1, u^2) \leftrightarrow (x, y)$ и $(v^1, v^2) \leftrightarrow (x, y)$.

Для базиса V имеем

$$m'_i = \frac{\partial r}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial v^i} + \frac{\partial r}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial v^i} = m_1\frac{\partial u^1}{\partial v^i} + m_2\frac{\partial u^2}{\partial v^i}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $\begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$. По симметричным соображениям $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \end{pmatrix}$. ■

1.5. Касательная плоскость

Определение. *Касательной плоскостью* к поверхности в точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и натянутая на векторы m_1 и m_2.

Это определение корректно, так как не зависит от параметризации поверхности: если мы возьмём другие параметры v^1 и v^2, то по предыдущей теореме вектора m'_1 и m'_2 линейно выражаются через m_1 и m_2, т. е. лежат в той же плоскости.

Теорема 1.9. *Касательная плоскость к поверхности состоит из всех касательных векторов к кривым на поверхности, проходящим через точку касания.*

□ Пусть кривая задается уравнением $r = r(t),\ r(t_0) = M_0$. Имеем

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial r}{\partial u^2}\dot{u}^2 = m_1\dot{u}^1 + m_2\dot{u}^2 \in \langle m_1, m_2\rangle\,, \tag{5}$$

т. е.. вектор скорости кривой лежит в касательной плоскости. Теперь возьмём произвольный вектор $\vec{a} := (\alpha, \beta)$ в касательной плоскости, и найдём кривую, для которой он будет касательным. Пусть наша поверхность задаётся уравнением $r = r(u^1, u^2)$. Подставим $u^1 = u^1_0 + \alpha t,\ u^2 = u^2_0 + \beta t$. Тогда

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u^1}\dot{u}^1 + \frac{\partial r}{\partial u^2}\dot{u}^2 = m_1\left(u^1_0 + \alpha t\right)'_t + m_2\left(u^2_0 + \beta t\right)'_t = \alpha m_1 + \beta m_2 = \vec{a}. \tag{6}$$

■

Теорема 1.10. *Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ имеет вид*

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0. \tag{7}$$

Частные производные берутся в точке M_0.

□ Рассмотрим кривую на поверхности, проходящую через точку M_0 и заданную уравнением $r = r(t)$. Тогда $F\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv 0$. Продифференцировав тождество, получим $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\operatorname{grad} F, \dot{r}) = 0$. Вектор $\dot{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ касательной плоскости пропорцианален $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, поэтому удовлетворяет (7). ■

Следствие 1.11. *Если поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид $z - z_0 = f'_{x_0}(x - x_0) + f'_{y_0}(y - y_0)$.*

Теорема 1.12. *Расстояние от точек поверхности до касательной плоскости является величиной 2-го порядка малости от Δt. Касательная плоскость — это единственная плоскость с таким свойством.*

$\square$ По формуле Тейлора имеем $\Delta r = m_1 \Delta u^1 + m_2 \Delta u^2 + \widetilde{R}$, где $\widetilde{R}$ — члены ряда порядка $\geqslant 2$. В точке r_0 возьмем произвольную плоскость с нормальным вектором n, таким что $|n| = 1$. Расстояние от точки $r_0 + \Delta r$ поверхности до этой плоскости равно $d = (\Delta r, n) = (n, m_1)\Delta u^1 + (n, m_2)\Delta u^2 + (n, \widetilde{R})$. Чтобы не было членов первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы $(n, m_1) = 0$ и $(n, m_2) = 0$, что равносильно условиям $n \perp m_1$ и $n \perp m_2$, т. е. это и есть касательная плоскость. $\blacksquare$

2. Теория гладких кривых

2.1. Длина дуги кривой

В курсе математического анализа длина кривой вводилась как предел длин вписанных ломаных Δr_i при стремлении длин звеньев к нулю: $s = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum |\Delta r_i|$. Мы же определим длину иначе.

Определение. *Длина гладкой кривой* $r = r(t)$ от точки $r(t_0)$ до точки $r(t)$ равна $s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{r}| dt$.

Длина не должна зависеть от параметризации кривой. Действительно, перейдем к другому параметру τ, тогда $t'_\tau \neq 0$. Пусть, например, $t'_\tau > 0$, тогда $|r'_t| dt = |r'_t| t'_\tau d\tau = |r'_\tau| d\tau$, и интеграл (длина) не изменится.

Теорема 2.1. *Длина кривой (в нашем определении) совпадает с пределом длин вписанных ломаных*[1].

$\square$ По определению интеграла $s = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum |v_i| \Delta t_i$, а в другом определении, раскладывая Δr_i в ряд Тейлора, получим $\Delta r_i = v_i \Delta t_i + \vec{R}_i \Delta t_i^2$, где $\vec{R}_i$ — некоторый ограниченный вектор. Оценим разность полученных сумм. В силу неравенства треугольника: $|\, |\Delta r_i| - |v_i| \Delta t_i \,| \leqslant |\vec{R}_i| \Delta t_i^2$, или для интегральных сумм $|\sum_i |\Delta r_i| - \sum_i |v_i| \Delta t_i \,| \leq \sum_i |R_i| \Delta t_i^2$. Можно считать, что все Δt_i равны Δt. При $\Delta t \to 0$ имеем $(\sum_i |R_i| \Delta t) \Delta t \to 0$, что и требовалось. $\blacksquare$

Следствие 2.2. $\frac{ds}{dt} = |v|, ds = |v| dt, dr = v dt,\ |dr| = ds.$

2.2. Натуральный параметр

Заметим, что величину $s = \int\limits_{t_0}^{t} |v| dt$ можно выбрать в качестве параметра кривой (так как $\frac{ds}{dt} = |v| \neq 0$, то функция $s = s(t)$ обратима: $t = t(s)$).

Определение. Такой параметр называется *натуральным*.

В дальнейшем, как правило, через s будем обозначать натуральный параметр, а через t — любой другой.

Теорема 2.3. *Параметр t является натуральным параметром s тогда и только тогда, когда в этой параметризации $|v| = 1$. Параметр t равен λs тогда и только тогда, когда $|v| = \mathrm{const}$.*

$\square$ Первое утверждение теоремы следует из второго. Пусть $t = \lambda s$, тогда $|v| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda} = \mathrm{const}$. Наоборот: если $|v| = \mathrm{const}$, то $ds = |v| dt \ \Rightarrow\ s = |v| t$ и $t = \frac{s}{|v|}$. $\blacksquare$

2.3. Кривизна кривой

Пусть кривая задана натуральным параметром $t = s$. Обозначим $v = \frac{dr}{ds} =: \varepsilon_1$ (это обозначение ещё встретится), причем $|\varepsilon_1| = 1$. Тогда при движении по кривой конец свободного вектора ε_1 будет двигаться по единичной сфере. Вектор ε'_1 будет лежать в касательной плоскости к сфере, следовательно, $\varepsilon'_1 \perp \varepsilon_1$. Можно было доказать это по-другому: параметр s натуральный, значит, $|\varepsilon_1| \equiv 1$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \equiv 1$. Продифференцировав тождество, получим $(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) + (\varepsilon'_1, \varepsilon_1) = 2(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) = 0 \ \Rightarrow\ \varepsilon_1 \perp \varepsilon'_1$. Заметим, что чем больше вектор ε'_1, тем сильнее изгибы кривой. Этим оправдано следующее

Определение. *Кривизной* гладкой кривой называется величина

$$k(s) := \left|\frac{d\varepsilon_1}{ds}\right| = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right|. \tag{1}$$

Теорема 2.4. *Кривая имеет на некотором участке нулевую кривизну $\Leftrightarrow$ этот участок прямолинейный.*

$\square$ Справа налево утверждение очевидно (продифференцируйте уравнение прямой!). Слева направо: по формуле Тейлора $r = r_0 + r' \Delta s + \frac{r'' \Delta s^2}{2} + \ldots$. Если $k(s) = |r''(s)| = 0$, то останется только член первого порядка, и кроме того, $\varepsilon_1 = \mathrm{const} = \vec{c}$, так как $\varepsilon'_1 = 0$. Получилось уравнение прямой вида $r = r_0 + \vec{c} s$. $\blacksquare$

[1] Более строгое доказательство было дано в курсе математического анализа во 2 семестре.

Этим оправдано следующее

Определение. Точка на кривой называется *точкой спрямления*, если в этой точке кривизна равна 0.

Теорема 2.5. *Расстояние от кривой до своей касательной в точке спрямления (и только в ней) является величиной третьего порядка малости относительно* Δs.

☐ Имеем

$$\Delta r = \frac{\varepsilon_1}{1!}\Delta s + \frac{r''}{2!}\Delta s^2 + \frac{r'''}{3!}\Delta s^3 + \dots \tag{2}$$

Возьмем произвольную прямую, проходящую через точку r_0 с направляющим вектором m, таким что $|m| = 1$. Тогда расстояние до этой прямой будет равно

$$d = \big|[m, \Delta r]\big| = \left|[m, \varepsilon_1]\Delta s + \frac{1}{2}[m, r'']\Delta s^2 + \frac{1}{6}[m, r''']\Delta s^3 + \dots\right|. \tag{3}$$

Расстояние d будет третьего порядка малости $\Leftrightarrow$ вектор m коллинеарен вектору ε_1 и коллинеарен вектору r''. Но так как эти векторы ортогональны, то это возможно тогда и только тогда, когда $k = 0$. ■

При рассмотрении плоских кривых можно определить кривизну со знаком. Пусть $\varepsilon_1 = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, где угол α — наклон касательной к оси Ox. Тогда $\varepsilon_1' = \alpha_s' \cdot (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$, следовательно $k(s) = |\alpha_s'|$. Для плоских кривых можно убрать модуль, и по определению полагают $k = \alpha_s'$.

2.4. Соприкасающаяся плоскость и соприкасающаяся окружность

При $k(s) \neq 0$ определён вектор $\varepsilon_2 = \frac{1}{k}\varepsilon_1' \perp \varepsilon_1$. Вектор ε_2 называетсяы вектором главной нормали кривой в точке $r(s)$.

Определение. Пусть $k(s_0) \neq 0$. Плоскость, натянутая на векторы ε_1 и ε_2 и проходящая через точку $r(s_0)$, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Пример. Рассмотрим окружность $r(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Найдём натуральный параметр: длина дуги равна $s = R\varphi$, следовательно $\varphi = \frac{s}{R}$. Переходя к параметру s, получим $r(s) = R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right)$. Тогда

$$\varepsilon_1 = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right), \quad \varepsilon_1' = \frac{1}{R}\left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right). \tag{4}$$

Следовательно, $\varepsilon_2 = \left(-\cos\frac{s}{R}, -\sin\frac{s}{R}\right)$, и кривизна $k = \frac{1}{R}$.

Определение. Если в некоторой точке $k \neq 0$, то величина $R = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны (в направлении ε_2)*. Окружность радиуса R в соприкасающейся плоскости с центром в точке, находящейся на расстоянии R от кривой в направлении вектора ε_2, называется *соприкасающейся*.

Теорема 2.6. *Расстояние от кривой до соприкасающейся окружности является величиной третьего порядка малости от Δs. Эта окружность — единственная с таким свойством.*

☐ Проведём произвольную окружность через точку r_0. Пусть k — кривизна кривой в точке r_0, $\widetilde{k}$ — кривизна окружности. Для кривой разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$r = r_0 + \varepsilon_1\Delta s + \frac{1}{2}k\varepsilon_2(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}r'''(\Delta s)^3 + \dots, \tag{5}$$

а для окружности

$$\widetilde{r} = r_0 + \widetilde{\varepsilon}_1\Delta s + \frac{1}{2}\widetilde{k}\widetilde{\varepsilon}_2(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}\widetilde{r}'''(\Delta s)^3 + \dots \tag{6}$$

Расстояние между этими точками равно длине вектора $\Delta r - \Delta\widetilde{r}$:

$$d = |(\varepsilon_1 - \widetilde{\varepsilon}_1)\Delta s + \frac{1}{2}(k\varepsilon_2 - \widetilde{k}\widetilde{\varepsilon}_2)(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}(r''' - \widetilde{r}''')(\Delta s)^3 + \dots| \tag{7}$$

Эта величина будет третьего порядка малости тогда и только тогда, когда $\varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1$ и $k\varepsilon_2 = \widetilde{k}\widetilde{\varepsilon}_2$. Поскольку векторы ε_2 и $\widetilde{\varepsilon}_2$ единичные, то $k = \widetilde{k}$. Значит, наша окружность совпадает с соприкасающейся. ■

Следствие 2.7. *Если плоская кривая имеет в некоторой точке ненулевую кривизну, то касательная в этой точке лежит по одну сторону от кривой.*

Теорема 2.8. *Соприкасающаяся плоскость — единственная плоскость, такая, что расстояние от кривой до неё третьего порядка малости от* Δs.

☐ Возьмём произвольную плоскость с еденичным нормальным вектором n, проходящую через точку r_0. Тогда расстояние до плоскости будет равно

$$d = |(n, \Delta r)| = \left|(n, \varepsilon_1)\Delta s + \frac{1}{2}k(n, \varepsilon_2)(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}(n, r''')(\Delta s)^3 + \dots\right| \tag{8}$$

Для выполнения условий теоремы необходимо и достаточно $(n, \varepsilon_1) = 0$, $(n, \varepsilon_2) = 0$, что и означает совпадение данной плоскости с соприкасающейся. ■

2.5. Трёхгранник Френе

Мы ввели в рассмотрение векторы $\varepsilon_1 = r'(s)$ и $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1'}{k}$, где k — кривизна кривой. Дополним их до базиса.

Определение. Вектор $\varepsilon_3 := [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ называется *вектором бинормали.* Репер $\big(r(s), \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\big)$ называется *трёхгранником Френе.* Заметим, что (как и ε_2) этот вектор определён только при $k \neq 0$.

Теорема 2.9 (Френе). *Имеют место формулы Френе*

$$\varepsilon_1' = k\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2' = -k\varepsilon_1 + \varkappa\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3' = -\varkappa\varepsilon_2. \tag{9}$$

Матрица перехода от базиса ε_i к базису ε_i' (записанная по строкам) называется матрицей Френе и имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

□ Рассмотрим два базиса $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, соответствующие точкам s и $s + \Delta s$. Пусть Π — матрица перехода от $\varepsilon_i(s)$ к $\varepsilon_i(s + \Delta s)$. Так как оба базиса ортонормированны, то эта матрица ортогональна. Следовательно, $\Pi^t\Pi = E$. Продифференцируем равенство: $(\Pi^t\Pi)' = (\Pi^t)'\Pi + \Pi^t(\Pi)' = 0$. Устремим $\Delta s \to 0$, тогда $\Pi \to E$. В пределе получаем равенство $(\Pi^t)' + (\Pi)' = 0$, т. е. $(\Pi')^t + \Pi' = 0$. Следовательно, матрица Π' кососимметрична. Первую строку этой матрицы, т. е. первую формулу Френе мы знаем, следовательно, знаем и первый столбец, а по диагонали стоят нули. Таким образом, матрица Френе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Осталось два места, противоположные по знаку. Обозначим их $\varkappa$ и $-\varkappa$, получим утверждение теоремы. ■

Определение. Функция $\varkappa(s)$ называется *кручением* кривой в точке s.

Название функции $\varkappa$ объясняется следующими теоремами.

Теорема 2.10. *Кривая имеет нулевое кручение на некотором участке $\Leftrightarrow$ на этом участке кривая плоская.*

□ Если кривая на некотором участке лежит в плоскости, то векторы ε_1 и ε_2 лежат в этой же плоскости (это следует из определения производной вектор-функции). Тогда вектор ε_3 коллинеарен нормали к плоскости, т. е. $\varepsilon_3 = \mathrm{const} \;\Rightarrow\; \varepsilon_3' = \varkappa\varepsilon_2 = 0 \;\Rightarrow\; \varkappa = 0$. Если же $\varkappa = 0$, то $\varepsilon_3 = \mathrm{const} = (A, B, C)$. Рассмотрим функцию $f(s) = (r(s), \varepsilon_3) = Ax(s) + By(s) + Cz(s)$. Тогда $f'(s) = (r'(s), \varepsilon_3) + (r(s), \varepsilon_3') = (\varepsilon_1, \varepsilon_3) + 0 = 0$, так как $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$. Следовательно, $f(s) = (r, \varepsilon_3) = \mathrm{const}$, а это есть уравнение некоторой плоскости. ■

Определение. Если в некоторой точке кривая имеет нулевое кручение, она называется *точкой уплощения.*

Теорема 2.11. *Точка r_0 есть точка уплощения $\Leftrightarrow$ расстояние от кривой до соприкасающейся плоскости четвёртого порядка малости от Δs.*

□ Вектор нормали соприкасающейся плоскости совпадает с ε_3 с точностью до знака. В силу равенства (8) условие теоремы выполняется тогда и только тогда, когда $(r''', \varepsilon_3) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} r''' &= (k\varepsilon_2)' = k'\varepsilon_2 + k\varepsilon_2' \overset{(9)}{=\!=} k'\varepsilon_2 + k(-k\varepsilon_1 + \varkappa\varepsilon_3), \\ (r''', \varepsilon_3) &= k'\underbrace{(\varepsilon_2, \varepsilon_3)}_{0} - k^2\underbrace{(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}_{0} + k\varkappa\underbrace{(\varepsilon_3, \varepsilon_3)}_{1} = k\varkappa. \end{aligned}$$

Поскольку $k \neq 0$, то $\varkappa = 0$. ■

Теорема 2.12 (Геометрический смысл кручения). *Коэффициент $\varkappa$ — это угловая скорость вращения соприкасающейся плоскости вокруг вектора ε_1. Если $\varkappa > 0$, то в соответствии с третьей формулой Френе соприкасающаяся плоскость вращается в положительном направлении (по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора ε_1).*

□ Пусть $\Delta\varphi$ — угол поворота соприкасающейся плоскости, т. е. угол поворота вектора ε_3 вокруг ε_1. Тогда

$$|\varkappa| = |\varepsilon_3'| \approx \frac{|\Delta\varepsilon_3|}{\Delta s} = \frac{|\Delta\varepsilon_3|}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \tag{12}$$

Устремив Δs к нулю, получим, что $|\varkappa| = |\varphi'_s|$, так как первый множитель в (12) есть предел отношения длины хорды к длине дуги при стремлении последней к нулю. ■

Для выяснения более полной картины нужна

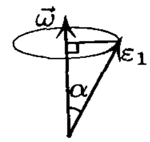
Лемма 2.13. *Если трехгранник e_1, e_2, e_3 вращается по часовой стрелке вокруг вектора $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ с угловой скоростью $|\omega|$, то скорости вращения концов векторов равны*

$$e'_1 = \gamma e_2 - \beta e_3, \quad e'_2 = -\gamma e_1 + \alpha e_3, \quad e'_3 = \beta e_1 - \alpha e_2, \tag{13}$$

т. е. матрица перехода от e_1, e_2, e_3 к e'_1, e'_2, e'_3 равна (по строкам)

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

□ Докажем, что скорость вращения конца вектора e_i равна $e'_i = [\omega, e_i]$. Действительно, этот вектор ортогонален векторам ω и e_i, т. е. $e'_i \perp \omega$ и $e'_i \perp e_i$, как и векторное произведение. Скорость конца вектора при вращении равна $|\omega| \sin\alpha$, где α — угол между ω и e_i, а величина $|\omega| \sin\alpha$ есть в точности площадь параллелограмма, натянутого на векторы ω и e_i, так как $|e_i| = 1$. Таким образом, вектор e'_i ортогонален ω и e_i, имеет длину, равную длине соответствующего векторного произведения и направлен по часовой стрелке, если смотреть в направлении ω. Значит, $e'_i = [\omega, e_i]$.



Остаётся вычислить координаты векторов скоростей: так как $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$, то получаем требуемое: $e'_1 = [\omega, e_1] = (0, \gamma, -\beta)$, $e'_2 = [\omega, e_2] = (-\gamma, 0, \alpha)$, $e'_3 = [\omega, e_3] = (\beta, -\alpha, 0)$. ■

Теорема 2.14. *В момент s (в точке $r(s)$) трёхгранник Френе вращается вокруг вектора $\omega := (\varkappa, 0, k)$ по часовой стрелке с угловой скоростью $|\omega|$.*

□ В самом деле, матрица перехода от ε_i к ε'_i есть матрица Френе (10), а по предыдущей лемме мгновенное вращение трехгранника происходит вокруг вектора $\omega = (\varkappa, 0, k)$. Теорема доказана. ■

Заметим, что в точке уплощения мгновенное вращение - вокруг вектора ε_3.

2.6. Вычисление кривизны и кручения

Теорема 2.15. *Для кривизны и кручения кривой $r = r(t)$ по произвольному параметру t справедливы следующие формулы:*

$$k = \frac{\left|[\dot r, \ddot r]\right|}{|\dot r|^3}, \quad \varkappa = \frac{\langle \dot r, \ddot r, \dddot r \rangle}{\left|[\dot r, \ddot r]\right|^2}. \tag{15}$$

В плоском случае кручение равно 0, а кривизна задаётся формулой

$$k = \frac{\dot x \ddot y - \ddot x \dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}. \tag{16}$$

□ Имеем $\frac{ds}{dt} = |\dot r|$. Выпишем производные $\dot r$ и $\ddot r$:

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right| \varepsilon_1, \quad \ddot r = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{dr}{dt}\right| \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \varepsilon_1 + \left|\frac{dr}{dt}\right| k\varepsilon_2 \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left|\frac{dr}{dt}\right| \cdot \varepsilon_1 + |\dot r|^2 k\varepsilon_2. \tag{17}$$

Следовательно, $[\dot r, \ddot r] = k\,|\dot r|^3\,\varepsilon_3$ и $\left|[\dot r, \ddot r]\right| = k\,|\dot r|^3$. Отсюда получаем общую формулу для кривизны:

$$k = \frac{\left|[\dot r, \ddot r]\right|}{|\dot r|^3}. \tag{18}$$

Из неё, очевидно, получается формула (16) для плоского случая. Найдём часть третьей производной, содержащую ε_3. Для этого достаточно найти часть $\frac{d(|\dot r|^2 k\varepsilon_2)}{dt}$, а именно

$$k|\dot r|^2 \frac{d\varepsilon_2}{dt} = k|\dot r|^2 \frac{d\varepsilon_2}{ds}\frac{ds}{dt} = k|\dot r|^3(-k\varepsilon_1 + \varkappa\varepsilon_3) = -k^2|\dot r|^3\varepsilon_1 + k\varkappa|\dot r|^3\varepsilon_3. \tag{19}$$

Отсюда $\dddot{r} = \widetilde{A} + k\varkappa|\dot{r}|^3\varepsilon_3$, где $\widetilde{A}$ — слагаемые, содержащие ε_1 и ε_2. Имеем

$$\langle \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \rangle = |\dot{r}|^6 k^2 \varkappa \underbrace{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle}_{1} = \big|[\dot{r}, \ddot{r}]\big|^2 \varkappa \;\Rightarrow\; \varkappa = \frac{\langle \dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \rangle}{\big|[\dot{r}, \ddot{r}]\big|^2}. \tag{20}$$

■

2.7. Построение кривой по кривизне и кручению

Покажем, что функции кривизны и кручения определяют кривую однозначно с точностью до начальных условий: кривая проходит через начало координат, и репер Френе совпадает с координатным репером. Иначе можно сформулировать так: кривые переводятся друг в друга ортогональным преобразованием. Рассмотрим сначала плоский случай.

Теорема 2.16. *Плоская кривая $r = r(s)$ с кривизной $k(s)$ и начальными условиями $\varepsilon_1(0) = e_1$, $r(0) = 0$ существует и притом единственна.*

□ Пусть $\alpha(s)$ — угол между векторами e_1 и $\varepsilon_1(s)$, т. е. угол наклона касательной. Тогда, как ранее было показано, $k = \alpha'(s)$, то есть $\alpha(s) = \int k(s)\,ds + \mathrm{const}$, но так как $\alpha(0) = 0$, то $\alpha(s)$ определяется однозначно. Имеем $\varepsilon_1 = \big(\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)\big)$, следовательно $x' = \cos\alpha(s)$, $y' = \sin\alpha(s)$. Поскольку $x(0) = y(0) = 0$, то функции $x(s) = \int \cos\alpha(s)\,ds$ и $y(s) = \int \sin\alpha(s)\,ds$ также определены однозначно. ■

Перейдем теперь к пространственному случаю. Предположим, что $k(s)$ не обращается в ноль ни при каких s (иначе функция $\varkappa(s)$ не определена).

Теорема 2.17. *Кривая с данными кривизной и кручением и указанными выше начальными условиями существует и единственна.*

□ Запишем формулы Френе по координатам. Все рассуждения будем вести для координаты x, для y и z — аналогично. Пусть $\varepsilon_i = (\varepsilon_{ix}, \varepsilon_{iy}, \varepsilon_{iz})$. Имеем

$$\varepsilon_{1x}' = k\varepsilon_{2x}, \quad \varepsilon_{2x}' = -k\varepsilon_{1x} + \varkappa\varepsilon_{3x}, \quad \varepsilon_{3x}' = -\varkappa\varepsilon_{2x}. \tag{21}$$

Это система дифференциальных уравнений с начальными условиями $\{\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \varepsilon_3(s)\}\Big|_{s=0} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Следовательно, существует и притом единственное решение системы. Далее, аналогично плоскому случаю, существуют и единственны функции $x(s) = \int \varepsilon_{1x} ds$, $y(s) = \int \varepsilon_{1y} ds$ и $z(s) = \int \varepsilon_{1z} ds$. Но надо ещё убедиться в том, что векторы $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \varepsilon_3(s)$ будут образовывать ортонормированный репер при любых значениях s. Для этого докажем более общее утверждение (лемма 2.18). ■

В дальнейшем часто будет использоваться тензорная форма записи формул без знака суммирования.

Лемма 2.18. *Пусть в пространстве V заданы линейно независимые векторы $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_n(t)$, такие что при $t = 0$ они ортонормированы. Пусть матрица $C = \big(c_i^j\big)$ кососимметрична, где $\varepsilon_i' = c_i^\alpha \varepsilon_\alpha$. Тогда векторы ε_i будут ортонормированы в любой момент времени.*

□ Пусть $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, и этот базис ортонормирован. Разложим ε_i по этому базису: $\varepsilon_i(t) = d_i^\alpha(t) e_\alpha$. Покажем, что матрица $D := \big(d_i^\alpha\big)$ ортогональна. Рассмотрим скалярное произведение строк α и β этой матрицы $P(t) = \sum\limits_{i=1}^n d_i^\alpha d_i^\beta$. Продифференцировав его, получим

$$P'(t) = \left(\sum_{i=1}^n d_i^\alpha d_i^\beta\right)' = \sum_{i=1}^n \big(d_i^\alpha\big)' d_i^\beta + \sum_{i=1}^n d_i^\alpha \big(d_i^\beta\big)'. \tag{22}$$

Найдём производные элементов матрицы D. Имеем

$$\varepsilon_i' = \big(d_i^\alpha\big)' e_\alpha = c_i^k \varepsilon_k = c_i^k d_k^\alpha e_\alpha. \tag{23}$$

Приравнивая коэффициенты при векторах e_α, получаем, что $\big(d_i^\alpha\big)' = c_i^k d_k^\alpha$. Теперь производную скалярного произведения (22) можно записать в виде

$$P'(t) = \sum_{i=1}^n c_i^k d_k^\alpha d_i^\beta + \sum_{i=1}^n d_i^\alpha c_i^k d_k^\beta. \tag{24}$$

Теперь вспомним, что матрица C кососимметрична и $c_i^k = -c_k^i$. Произведём во второй сумме замены индексов суммирования i на k и k на i. Тогда вторая сумма равна первой, взятой с противоположным знаком. Значит, производная скалярного произведения любых двух строк матрицы D равна 0 при любом t, откуда следует, что само скалярное произведение постоянно, т. е. оно совпадает со своим начальным значением. При $t = 0$ матрица ортогональна, значит, она ортогональна и при всех t. ■

3. Теория поверхностей

3.1. Первая квадратичная форма

Рассмотрим произвольную поверхность $r = r(u^1, u^2)$, u^1 и u^2 — координаты на поверхности, и по определению гладкой поверхности векторы $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$ и $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$ не коллинеарны. Рассмотрим их матрицу Грама:

$$G = G(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} (m_1, m_1) & (m_1, m_2) \\ (m_1, m_2) & (m_2, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Коэффициенты этой матрицы являются функцией от координат, т. е. $g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2)$. При замене координат $(u^1, u^2) \to (v^1, v^2)$ матрицей перехода будет матрица Якоби $J = \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$, и матрица Грама изменится по формуле $G' = J^t G J$. Элементы новой матрицы будут равны

$$g'_{\alpha\beta} = (m'_\alpha, m'_\beta) = \left(\frac{\partial r}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial r}{\partial v^\beta}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}\right) = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}. \tag{2}$$

Найдём угол между двумя пересекающимися кривыми на поверхности с уравнениями $r(t) = \big(u^1(t), u^2(t)\big)$ и $\widetilde{r}(\tau) = \big(\widetilde{u}^1(\tau), \widetilde{u}^2(\tau)\big)$. Он равен углу между касательными векторами v и $\widetilde{v}$, которые равны соответственно

$$v = \left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right) = \frac{du^1}{dt}m_1 + \frac{du^2}{dt}m_2, \quad \widetilde{v} = \left(\frac{d\widetilde{u}^1}{d\tau}, \frac{d\widetilde{u}^2}{d\tau}\right) = \frac{d\widetilde{u}^1}{d\tau}m_1 + \frac{d\widetilde{u}^2}{d\tau}m_2. \tag{3}$$

По формуле для скалярного произведения получаем

$$\begin{aligned}
(v, \widetilde{v}) &= g_{11}\frac{du^1}{dt}\frac{d\widetilde{u}^1}{d\tau} + g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\frac{d\widetilde{u}^2}{d\tau} + \frac{du^2}{dt}\frac{d\widetilde{u}^1}{d\tau}\right) + g_{22}\frac{du^2}{dt}\frac{d\widetilde{u}^2}{d\tau},\\
(v, v) &= g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2,\\
(\widetilde{v}, \widetilde{v}) &= g_{11}\left(\frac{d\widetilde{u}^1}{d\tau}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\widetilde{u}^1}{d\tau}\frac{d\widetilde{u}^2}{d\tau} + g_{22}\left(\frac{d\widetilde{u}^2}{d\tau}\right)^2,
\end{aligned}$$

а тогда косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(v, \widetilde{v})}{|v||\widetilde{v}|}. \tag{4}$$

Так как $dr = vdt$ и $d\widetilde{r} = \widetilde{v}d\widetilde{t}$, то формально умножая полученные три равенства на $(dt)^2$, получаем

$$\begin{aligned}
(dr, d\widetilde{r}) &= g_{11}du^1 d\widetilde{u}^1 + g_{12}\left(du^1 d\widetilde{u}^2 + du^2 d\widetilde{u}^1\right) + g_{22}du^2 d\widetilde{u}^2,\\
(dr, dr) &= g_{11}\left(du^1\right)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2,\\
(d\widetilde{r}, d\widetilde{r}) &= g_{11}\left(d\widetilde{u}^1\right)^2 + 2g_{12}d\widetilde{u}^1 d\widetilde{u}^2 + g_{22}\left(d\widetilde{u}^2\right)^2.
\end{aligned}$$

Определение. Квадратичная функция $ds^2 = (dr, dr) = g_{ij}du^i du^j$, определённая на касательных векторах в точках поверхности, называется *первой квадратичной формой* (или *метрикой*) поверхности. Она определяет соответсвующую билинейную функцию $(dr, d\tilde{r}) = g_{ij}du^i d\tilde{u}^j$

Таким образом, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{(dr, d\tilde{r})}{|dr||d\tilde{r}|} = \frac{g_{ij}du^i d\tilde{u}^j}{\sqrt{g_{ij}du^i du^j}\sqrt{g_{ij}d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j}} \tag{5}$$

Термин "метрика"оправдывается тем, что с помощью первой квадратичной формы вычисляются длины кривых на поверхности, заданных в криволинейных координатах как $(u^1(t), u^2(t))$:

$ds^2 = g_{i,j}du^i du^j = (g_{i,j}\dot{u}^i\dot{u}^j)dt^2, s = \int ds = \int \sqrt{g_{i,j}\dot{u}^i\dot{u}^j}dt$

Найдём матрицу Грама при других способах задания поверхности. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$. Тогда $m_1 = (1, 0, f_x)$ и $m_2 = (0, 1, f_y)$, значит, матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = 1 + f_x^2 + f_y^2. \tag{6}$$

Если же поверхность задана неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, то, считая для определённости $F_z \neq 0$, выразим частные производные: $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$ и $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$, и сведём задачу к предыдущей.

3.2. Площади областей

Покажем теперь, как найти площадь области на поверхности $r = r(u^1, u^2)$. Координаты u^1 и u^2 образуют сетку на поверхности. Чтобы найти площадь области, найдем площади маленьких параллелограммов со сторонами $m_{1i}\Delta u_i^1$ и $m_{2i}\Delta u_i^2$, просуммируем их и перейдём к пределу при $\Delta u \to 0$. Площадь такого параллелограмма равна $S_i = \big|[m_{1i}, m_{2i}]\big|\Delta u_i^1 \Delta u_i^2$. В пределе получим

$$S = \iint \big|[m_1, m_2]\big| du^1 du^2. \tag{7}$$

Величина $\big|[m_1, m_2]\big|$ равна площади параллелограмма, натянутого на векторы m_1 и m_2. Как известно, эта площадь равна $\sqrt{|G|}$, где G — матрица Грама векторов m_1, m_2. Таким образом, получаем формулу

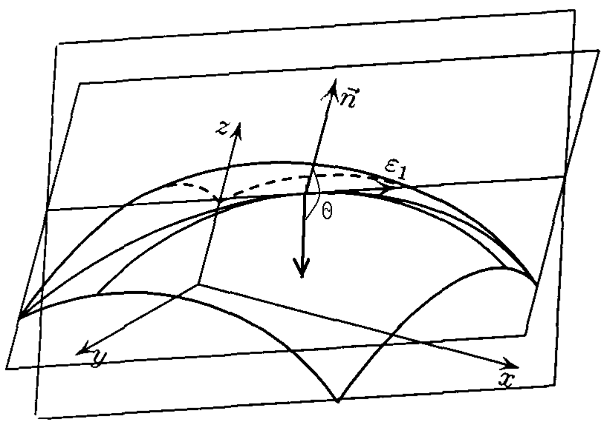
$$S = \iint \sqrt{|G|} du^1 du^2. \tag{8}$$

В этом выражении элементы матрицы G под интегралом суть функции от координат u^1 и u^2.

В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то, применяя формулу (6), получаем, что площадь области равна

$$S = \iint \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2} dxdy. \tag{9}$$

3.3. Внешняя геометрия и вторая квадратичная форма



Будем теперь изучать поверхность локально в окрестности фиксированной точки A_0. Для этого возьмем нормальный вектор к поверхности $n := \frac{[m_1, m_2]}{|[m_1, m_2]|}$ и будем рассматривать все плоскости, содержащие точку A_0 и этот вектор. Сечения поверхности такими плоскостями назовём *нормальными сечениями.*

Зафиксируем какой-нибудь единичный вектор $\varepsilon_1 \perp n$ и рассмотрим нормальное сечение в точке A_0 плоскостью α, натянутой на векторы ε_1 и n. Теперь повернем эту плоскость вокруг ε_1 на угол $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Обозначим эту плоскость через β.

В пересечении поверхности и этой плоскости будет гладкая кривая. Действительно, в соответсвии с теоремой 1.4 зададим поверхность уравнением $F(x, y, z) = 0$. Линия пересечения задается системой

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Поскольку угол поворота θ не равен $\frac{\pi}{2}$, то вектор нормали (A, B, C) к плоскости не коллинеарен вектору $\operatorname{grad} F$, который параллелен n, и из теоремы о неявных функциях следует, что две из координат, например, y и z, оказываются гладкими функциями третьей: $y = y(x), z = z(x), r = r(x, y(x), z(x)), \dot{r} = (1, \dot{y}, \dot{z}) \neq 0$.

Будем рассматривать кривые, у которых обсуждаемая плоскость $(A_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ является соприкасающейся. В доказательстве следующей теоремы будем использовать введённые выше обозначения.

Теорема 3.1 (Менье). *Все кривые на поверхности, проходящие через A_0, касающиеся ε_1 и имеющие одну и ту же соприкасающуюся плоскость, имеют одинаковую кривизну в точке A_0.*

□ Чтобы не путать индексы переменных со степенями, в этом доказательстве обозначим криволинейные координаты буквами u и v вместо u^1 и u^2. Пусть поверхность задана уравнением $r = r(u, v)$. Возьмем кривую $r = r\big(u(t), v(t)\big)$ с заданной соприкасающейся плоскостью, и пусть t — натуральный параметр. Вектор ε_1 для нее — это первый вектор базиса Френе, т. е.

$$\varepsilon_1 = \dot r = \frac{\partial r}{\partial u}\dot u + \frac{\partial r}{\partial v}\dot v = \dot u m_1 + \dot v m_2. \tag{11}$$

Вектор ε_2 — это второй вектор базиса Френе, он одинаков для всех кривых рассматриваемого класса. Имеем

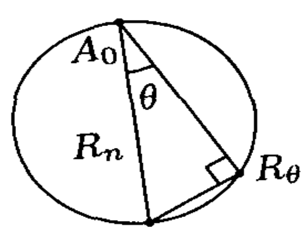
$$k\varepsilon_2 = \dot\varepsilon_1 = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\dot u^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}\dot u\dot v + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}\dot v^2 + \ddot u m_1 + \ddot v m_2. \tag{12}$$

Умножим вектор $k\varepsilon_2$ скалярно на n и учтём, что $(m_i, n) = 0$. Получим следующее выражение:

$$(k\varepsilon_2, n) = k\cos\theta = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, n\right)\dot u^2 + 2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, n\right)\dot u\dot v + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}, n\right)\dot v^2. \tag{13}$$

Коэффициенты при производных не зависят от кривой, $\cos\theta$ тоже одинаковый для все кривых с данной соприкасающейся плоскостью, величины $\dot u$ и $\dot v$ являются координатами зафиксированного нами вектора ε_1, следовательно, тоже постоянны. Следовательно, кривизна одинакова для всех кривых с данной соприкасающейся плоскостью. ■

Определение. Кривизна при нормальном сечении называется *нормальной кривизной* и обозначается k_n.



Из теореме Менье следует, что кривизна произвольного сечения определяется по формуле $k_\theta = \frac{k_n}{\cos\theta}$, а радиусы кривизны связаны соотношением $R_\theta = R_n\cos\theta$, где R_n — радиус кривизны нормального сечения. Центры кривизны для разных углов θ лежат на окружности S с диаметром R_n, перпендикулярным вектору ε_1, а сами соприкасающиеся окружности образуют сферу. Действительно, если плоскость повернуть на угол θ, то центр кривизны будет на расстоянии $R_\theta = R_n\cos\theta$ от точки A_0, т. е. попадёт на окружность S (в ортогональной к ε_1 плоскости). Вывод: важно знать кривизны всех нормальных сечений в точке A_0.

Итак, мы получили формулу для кривизны нормального сечения:

$$k_n = l_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2l_{12}\left(\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}\right) + l_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2, \quad l_{ij} := \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, n\right). \tag{14}$$

Таким образом, k_n - это квадратичная функция от $\frac{du^1}{ds}$ и $\frac{du^2}{ds}$. Для произвольного параметра t имеем $ds = |dr| = |v|dt$, поэтому

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot u^i}{|v|}. \tag{15}$$

Следовательно, кривизна нормального сечения по направления $v = (\dot u^1, \dot u^2)$ равна

$$k_n = \frac{l_{ij}\dot u^i\dot u^j}{|v|^2} = \frac{l_{ij}\dot u^i\dot u^j}{g_{ij}\dot u^i\dot u^j} = \frac{l_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j}. \tag{16}$$

Определение. Квадратичная функция $l_{ij}du^i du^j$, определенная на касательных векторах в точках поверхности, называется *второй квадратичной формой* поверхности.

Осуществим замену координат $(u^1, u^2) \to (v^1, v^2)$ с матрицей перехода $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$. Пусть в новом базисе квадратичная форма имеет коэффициенты $l'_{\alpha\beta}$, тогда

$$l'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, n\right), \quad \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + m_i \frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}. \tag{17}$$

Следовательно, так как $m_i \perp n$

$$l'_{\alpha\beta} = l_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \Leftrightarrow L' = J^t L J. \tag{18}$$

Значит, выражение $l_{ij}du^i du^j$ действительно является квадратичной формой. Её матрицу будем обозначать буквой L. Итак, мы получили, что в любой точке поверхности нормальные кривизны по любым направлениям (du^1, du^2) равны отношению второй и первой квадратичных форм.

Заметим, что в отличие от теории кривых, где всегда $k \geq 0$, величина k_n может иметь знак: в зависимости от направления нормального сечения вектор ε_2 для этого сечения может совпадать с n или с $-n$.

3.4. Главные направления и главные кривизны

Теперь будем вращать плоскость нормального сечения вокруг вектора n на угол φ. При этом мы будем получать нормальные кривизны $k_n = k_n(\varphi)$. Эта непрерывная функция периодична с периодом π и имеет максимальное и минимальное значения.

Определение. Максимальное и минимальное значение нормальной кривизны k_n называются *главными кривизнами*. Их направления называются *главными направлениями* (в рассматриваемой точке поверхности).

Теорема 3.2. *В любой точке поверхности существует ровно две главных кривизны и ровно два главных направления (или все направления главные). Главные направления ортогональны.*

$\square$ Рассуждаем в фиксированной точке A_0 поверхности. Заметим, что любому преобразованию координат в плоскости $A_0 m_1 m_2$ (переходу к новому базису $A_0 m'_1 m'_2$) отвечает такое же преобразование криволинейных координат вблизи A_0 на поверхности:

$$\begin{pmatrix} u^1 - u^1_0 \\ u^2 - u^2_0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Здесь C есть матрица перехода от m_1, m_2 к m'_1, m'_2. Таким образом, можно перейти к координатам v^1, v^2, для которых $m'_i = \frac{\partial r}{\partial v_i}, i = 1, 2$, ортонормированы (в точке A_0). Выберем на поверхности такие координаты (v^1, v^2). В них первая квадратичная форма имеет вид $\left(dv^1\right)^2 + \left(dv^2\right)^2$, следовательно, кривизна равна $k_n = \frac{l_{ij}dv^i dv^j}{(dv^1)^2 + (dv^2)^2}$. Первая квадратичная форма положительно определена, и по теореме из линейной алгебры сущетсвуют координаты (w^1, w^2) на поверхности с ортонормированными в точке A_0 векторами $\frac{\partial r}{\partial w_1}, \frac{\partial r}{\partial w_2}$, для которых

$$k_n = \frac{\lambda_1\left(dw^1\right)^2 + \lambda_2\left(dw^2\right)^2}{\left(dw^1\right)^2 + \left(dw^2\right)^2} = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\sin^2\varphi. \tag{19}$$

Здесь φ - угол наклона вектора (dw^1, dw^2) к вектору $m''_1 = \frac{\partial r}{\partial w_1}$. Следовательно, k_n заключено между λ_1 и λ_2 — это и есть главные кривизны (они единственны). Направления векторов базиса m''_1, m''_2 являются главными направлениями, откуда следует второе утверждение теоремы. $\blacksquare$

Формула (19) называется *формулой Эйлера*.

Определение. Точки поверхности классифицируются при помощи главных кривизн следующим образом:

1° Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то точка поверхности называется *сферической*(все направления главные).

2° Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то точка поверхности называется *эллиптической*. В силу следствия 2.7 вблизи A_0 поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости.

3° Если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то точка поверхности называется *гиперболической*. Поверхность расположена по разные стороны от касательной плоскости.

4° Если $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$, то точка называется параболической.

5° Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то точка поверхности называется *точкой уплощения*. В этом случае $L = 0$ (вторая квадратичная форма равна нулю).

Определение. *Гауссовой кривизной* называется произведение главных кривизн $K := \lambda_1\lambda_2$. *Средней кривизной* называется сумма (иногда полусумма) главных кривизн. Главные кривизны λ_1,λ_2 - инварианты второй квадратичной формы.

3.5. Вычисление главных кривизн и направлений

Теорема 3.3. *Главные кривизны* λ_1, λ_2 *являются корнями уравнения* $\det(L-\lambda G)=0$.

□ Числа λ_1,λ_2 - инварианты квадратичной формы $l_{ij}du^i du^j$. В ортонормированных координатнах в силу теоремы из линейной алгебры числа λ_1, λ_2 являются корнями характеристического многочлена $p(\lambda)=\det\big(\widetilde{L}-\lambda E\big)$, где $\widetilde{L}$ — матрица второй квадратичной формы в ортонормированном базисе.

Пусть теперь наши координаты u^1 и u^2 произвольны, а v^1 и v^2 — координаты в окрестности A_0, для которых векторы m_1', m_2' ортонормированы. Пусть J — матрица перехода от ортонормированного базиса к нашему m_1, m_2 (матрица Якоби). Тогда

$$J^t\big(\widetilde{L}-\lambda E\big)J = L-\lambda G \Rightarrow p(\lambda)=\frac{\det(L-\lambda G)}{\det(J^tJ)}=\frac{\det(L-\lambda G)}{\det G}. \tag{20}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $L=J^tL'J, G=J^tG'J$, где $G'=E$). Это означает, что корни характеристического многочлена в ортонормированном базисе (а они и есть главные кривизны) совпадают с корнями уравнения $\det(L-\lambda G)=0$, что и требовалось. ■

Следствие 3.4. *Поскольку произведение корней характеристического многочлена* $p(\lambda)$ *равно его свободному члену, получаем формулу для гауссовой кривизны:*

$$K=\lambda_1\lambda_2=\frac{\det L}{\det G}. \tag{21}$$

Теорема 3.5. *Главные направления, соответствующие* λ_i, *удовлетворяют уравнениям* $(L-\lambda_i G)\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Здесь $\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}$ - координаты вектора в локальном базисе m_1, m_2.

□ Будем действовать аналогично предыдущей теореме. Пусть v^1, v^2 — некоторые координаты на поверхности. Если бы векторы m_1', m_2' в точке A_0 были ортонормированны, то в этом случае мы из линейной алгебры знаем, что главные направления удовлетворяют уравнениям $(\widetilde{L}-\lambda_i E)\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Пусть теперь координаты u^1 и u^2 произвольны, а v^1 и v^2 — координаты, указанные выше. Пусть J — матрица перехода от координат v^1, v^2 к нашим. Тогда $\begin{pmatrix}dv^1\\dv^2\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}$, и равенство, которому удовлетворяют главные направления, перепишется в виде: $\big(\widetilde{L}-\lambda_i E\big)J\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Домножим обе части равенства на J^t слева, получим $J^t\big(\widetilde{L}-\lambda_i E\big)J\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, то есть $(L-\lambda_i G)\begin{pmatrix}du^1\\du^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. ■

Зная коэффициенты матриц G и L, можно найти главные кривизны и направления. Вспомним, чему равны коэффициенты квадратичных форм:

$$g_{ij}=(m_i, m_j), \quad l_{ij}=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n}\right)=\frac{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j}, [m_1, m_2]\right)}{\big|[m_1, m_2]\big|}=\frac{\left\langle m_1, m_2, \frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j}\right\rangle}{\sqrt{|G|}}. \tag{22}$$

Рассмотрим случай, когда поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$. Тогда $m_1=(1,0,f_x'), m_2=(0,1,f_y')$, $\frac{\partial r}{\partial x^2}=(0,0,f_{xx}'')$, $\frac{\partial r}{\partial x\partial y}=(0,0,f_{xy}'')$, $\frac{\partial r}{\partial y^2}=(0,0,f_{yy}'')$, поэтому

$$L=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\cdot\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}, \quad |L|=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2}, K=\frac{|L|}{|G|}=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}. \tag{23}$$

Если главными направлениями являются оси Ox и Oy, то $f_x'=f_y'=0$, $f_{xy}=l_{12}=0, l_{11}=\lambda_1=f_{xx}, l_{22}=\lambda_2=f_{yy}, |L|=f_{xx}f_{yy}, |G|=1, K=f_{xx}f_{yy}$.

3.6. Сферическое (гауссово) отображение

Пусть задана плоская кривая $r=r(s)$. Рассмотрим вектор нормали $n(s)$ к этой кривой, перенесём его в центр единичной окружности. Получится кривая $\widetilde{r}=n(s)$ на этой окружности. Кривизна $k(s)$ кривой равна

α'_s, где α — угол между касательным вектором и осью Ox (см. п. 2.6). Имеем $\alpha'_s = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, где Δs — длина дуги на $r(s)$. $\Delta\alpha$ — угол от $\varepsilon_1(s)$ до $\varepsilon_1(s+\Delta s)$, он равен углу от $n(s)$ до $n(s+\Delta s)$. Отображение кривой на окружность называется *круговым отображением кривой*. Кривизна кривой есть предел отношения приращения дуги на окружности к приращению на кривой, $k = \frac{d\widetilde{s}}{ds}$.

Аналогичное отображение существует и в для поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Определение. Рассмотрим поверхность $r(u^1, u^2)$ и единичный вектор $n := \frac{[m_1,m_2]}{|[m_1,m_2]|}$. Сопоставим точке поверхности конец вектора n, лежащий на единичной сфере. Такое отображение называется *сферическим*.

При помощи сферического отображения выведем ещё один геометрический смысл гауссовой кривизны.

Теорема 3.6. *Рассмотрим область малой площади ΔS на поверхности и $\Delta\widetilde{S}$ — площадь образа этой области на сфере при сферическом отображении. Тогда $\lim\limits_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta\widetilde{S}}{\Delta S} = |K|$.*

□ Возьмём «хорошую» систему координат, т. е. такую, что уравнение поверхности имеет вид $z = f(x,y)$, Oxy - касательная плоскость в точке $0 = f(0,0)$ и направления Ox, Oy являются главными. Тогда площадь куска поверхности равна $\Delta S = \iint\limits_{\Omega} \big|[m_1,m_2]\big| dxdy$, где Ω — область изменения параметров, $m_1 = (1,0,f'_x)$, $m_2 = (0,1,f'_y)$.

Найдём координаты сферического образа куска поверхности. Обозначив через L число $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$, имеем

$$\widetilde{r} := \vec{n} = \frac{[m_1,m_2]}{|[m_1,m_2]|} = (-f_x,-f_y,1)\,\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = (-f_x,-f_y,1)\,\frac{1}{L}. \tag{24}$$

Найдём векторы частных производных:

$$\widetilde{m}_1 := \frac{\partial\widetilde{r}}{\partial x} = \left(\frac{1}{L}\right)'_x(-f_x,-f_y,1) + \frac{1}{L}\left(-f_{xx},-f_{yx},0\right), \tag{25}$$

$$\widetilde{m}_2 := \frac{\partial\widetilde{r}}{\partial y} = \left(\frac{1}{L}\right)'_y(-f_x,-f_y,1) + \frac{1}{L}\left(-f_{xy},-f_{yy},0\right). \tag{26}$$

Отсюда, воспользовавшись теоремой о среднем, получаем в начале координат

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\widetilde{S}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\iint|[\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2]|\,dxdy}{\iint|[m_1,m_2]|\,dxdy} \to \frac{|[\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2]|}{|[m_1,m_2]|}. \tag{27}$$

В начале координат $f_x = f_y = f_{xy} = 0$ и $[m_1,m_2] = (0,0,1)$. Значит, $\big|[m_1,m_2]\big| = 1$, а $\widetilde{m}_1 = (-\lambda_1,0,0)$ и $\widetilde{m}_2 = (0,-\lambda_2,0)$, поскольку $(\frac{1}{L})'_x = (\frac{1}{L})'_y = 0$ и $f''_{xx} = \lambda_1$, $f''_{yy} = \lambda_2$ (см. п. 3.5). Таким образом, $[\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2] = (0,0,\lambda_1\lambda_2)$, $|[\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2]| = |\lambda_1\lambda_2| = |K|$. ■

4. Криволинейные координаты. Метрика Римана

4.1. Криволинейные координаты в n-мерном пространстве

Возьмем некоторую область $O \subset \mathbb{R}^n$, имеем взаимно-однозначное соответствие между точками области и наборами координат: $A \to (x^1,\ldots,x^n)$. Возникае вопрос: возможны ли ещё какие-то взаимно однозначные соответсвия $A \leftrightarrow (u^1,...,u^n)$ для каких-то наборов числовых параметров $u^1,...,u^n$. Примеры полярных координат (ρ,φ) на плоскости, цилинрических (ρ,φ,z) и сферических (ρ,φ,θ) в $\mathbb{R}^3$ показывают, что это возможно, по крайней мере для небольших областей O.

Если указанное соответсвие определено, то вблизи $A \in O$ возникает и взаимно однозначное соответствие $(x^1,...,x^n) \leftrightarrow (u^1,...,u^n)$. В этом случае u^i оказываются функциями $u^i(x^1,...,x^n)$ (и наоборот - $x^j = x^j(u^1,...,u^n)$). С точки зрения содержательности предмета рассмотрения естественно требовать, чтобы те и другие функции были гладкими. В этом случае определены матрицы Якоби $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\}$ и $\mathcal{J} = \{\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\}$ и они оказываются взаимно обратными.

Наличие взаимно однозначного соответвия $(x^1,...,x^n) \leftrightarrow (u^1,...,u^n)$, во всяком случае локально, является следствием гладкости функций $u^i = u^i(x^1,...,x^n)$ и невырожденности матрицы J, поскольку из условия $detJ \neq 0$ в силу теоремы о неявных функциях следует обратимость соответствия $(x^1,...,x^n) \to (u^1,...,u^n)$, т.е. наличие гладких функций $x^i = x^i(u^1,...,u^n)$, обращающих это соответсвие.

Определение. Под криволинейными координатами в окрестности точки $A_0 = (x_0^1,...,x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ понимаются гладкие функции $u^1,...,u^n$, $u^i = u^i(x^1,...,x^n)$, определённые в окрестности A_0 и такие, что матрица Якоби J невырождена (если она невырождена в точке, то, очевидно, и в некоторой окрестности точки).

Замечание. Параметры $u^1, ..., u^n$ заполняют некоторую область $U \subset \mathbb{R}^n$. В самом деле, поскольку имеется гладкое отображение $(u^1, ..., u^n) \to (x^1, ..., x^n)$, то прообразы окрестностей точки $A_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ составят окрестности набора $(u_0^1, ..., u_0^n)$ - прообраза $(x_0^1, ..., x_0^n)$. Таким образом, задание криволинейных координат в содержащей A_0 области O эквивалентно заданию диффеоморфизма этой области на некоторую область $U \subset \mathbb{R}^n$ изменения параметров $u^1, ..., u^n$.

Под координатной u^i-линией в области O понимается множество точек с постоянными координатами u^j для $j \neq i$. Эта линия правильно параметризована: вектор $m_i = (\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, ..., \frac{\partial x^n}{\partial u^i})$ отличен от ненулевого как столбец матрицы $\mathcal{J}$. В нашей точке области O векторы $m_1, ..., m_n$ составляют локальный базис.

Любая гладкая кривая $r(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ имеет гладкое описание $(u^1(t), ..., u^n(t))$ в криволинейных координатах как $u^i(x^1(t), ..., x^n(t)))$.

Предложение 4.1. *Набор $(\dot{u}^1, ..., \dot{u}^n)$ - координаты вектора $v = \frac{dr}{dt}$ в локальном базисе $m_1, ..., m_n$.*

В самом деле, $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \dot{u}^i m^i$.

Если $(v^1, ..., v^n)$ - другие криволинейные координаты в окрестности A_0, то из обратимостей $(u^1, ..., u^n) \leftrightarrow (x^1, ..., x^n) \leftrightarrow (v^1, ..., v^n)$ следует, что $u^i = u^i(v^1, ..., v^n)$ - гладкие функции, и $v^j = v^j(u^1, ..., u^n)$ - аналогично. Имеются матрицы Якоби $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$ и $\mathcal{J} = \{\frac{\partial v^j}{\partial u^j}\}$.

Теорема 4.2. *J - метрица перехода от локального базиса $m_1, ..., m_n$ к новому базису $m'_j = \frac{\partial r}{\partial v^j}, j = 1, ..., n$.*

В самом деле, $m'_j = \frac{\partial r}{\partial v^j} = \frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^j} = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} m_i$.

Аналогично, $\mathcal{J}$ - матрица перехода от второго базиса к первому, $\mathcal{J} = J^{-1}$. Заметим, что такова картина в каждой точке, где определены те и другие криволинейные координаты.

В определении криволинейных координат предполагалось, что их число равно $n = dim\mathbb{R}^n$. Нельзя ли ввести криволинейные координаты $v^1, ..., v^m$ в числе $m \neq n$?

Теорема 4.3. *Число m обязательно равно n.*

В самом деле, если $m \neq n$, то одно из них больше, пусть это будет, например, m. В этом случае $\{\frac{\partial v^i}{\partial v^j}\} = E$ - еденичная $(m \times m)$ матрица. Но $\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = \frac{\partial v^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial v^j}$, а это означает, что $E = \mathcal{J}J$ - произведение прямоугольных $(m \times n)$ матриц ранга $n < m$.

Следствие 4.4. *(инвариантность размерности евклидова пространства). При $m \neq n$ пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не диффеоморфны.*

Утверждение вытекает из того, что задание криволинейных координат, как отмечено выше, эквивалентно заданию диффеоморфизма области $O \subset \mathbb{R}^n$ на область изменения параметров $v^1, ..., v^m$.

4.2. Криволинейные координаты на k-поверхности в $\mathbb{R}^n$

Определение. Фигура в $\mathbb{R}^n$ (множество точек) называется *k-мерной поверхностью*(геометрическим многообразием размерности k), если вблизи каждой своей точки она допускает параметризацию вида:

1° $r = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^k)$ — гладкие функции;

2° Векторы $m_i := \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $i = 1, ..., k$, линейно независимы, т. е. матрица Якоби (1) имеет ранг k.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Заметим, что всегда $k \leq n$. Случай $k = n$ - это область в $\mathbb{R}^n$ с криволинейными координатами $(u^1, ..., u^n)$, см п. 4.1. При $k = 1$ получается гладкая кривая, при $k = 2$ — гладкая поверхность. В силу тех же аргументов, что и в п. 1.3 (матрица J имеет ранг k), некоторые k функций x^i обратимы, например, $x^1, ..., x^k$, для точек поверхности возникает взаимно однозначное соответствие $(x^1, ..., x^k) \leftrightarrow (u^1, ..., u^k) \leftrightarrow (x^1, ..., x^n)$, так что $u^1, \ldots, u^k$ будут локальными координатами на поверхности — это следует из теоремы о неявных функциях.

Рассмотрим локальный базис $(m_1, \ldots, m_k)$, зависящий от точки. Если заданы другие координаты $(v^1, \ldots, v^k)$, то из только что указанных обстоятельств $u^1, ..., u^k$ - гладкие функции от $v^1, ..., v^k$ и наоборот. При этом матрица Якоби $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$ является матрицей перехода от m_i к m'_i:

$$m'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i} = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = m_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}. \tag{2}$$

Аналогично трёхмерному случаю определяются координатные линии: фиксируем все координаты, кроме одной. Получается правильно параметризованная кривая на поверхности, так как её касательный вектор есть один из векторов m_i, который всегда ненулевой.

Теорема 4.5. *Размерность k многообразия определена однозначно.*

□ Пусть одно и то же многообразие задаётся двумя уравнениями: $r = r(u^1, \dots, u^k)$ и $r = r(v^1, \dots, v^l)$. По указанным только что причинам $u^1, ..., u^k$ - гладкие функции от $v^1, ..., v^l$, и наоборот.

Допустим, что $k > l$. Тогда
$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^j}. \tag{3}$$
Поскольку $\mathrm{rk}(A \times B) \leqslant \min(\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B)$, то получаем противоречие: матрица слева — единичная ранга k, а справа — строго меньше k. ■

Многообразие также можно задавать в неявной форме.

Пусть задана система уравнений
$$\begin{cases} F_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ F_p(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases} \tag{4}$$
и все функции гладкие. Если в каждой точке, удовлетворяющей системе, матрица Якоби $J = \left\{\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right\}$ имеет полный ранг, то решением системы является многообразие размерности $n - p$. Покажем, что это эквивалентное определение. Будем считать, что минор ранга p находится в правой части матрицы J. Тогда по теореме о неявном отображении существует выражение последних p координат через первые $k := n - p$ координат. Примем координаты $x^1, \dots, x^k$ за параметры и получим требуемое: $r = r(x^1, \dots, x^k)$. Матрица Якоби будет невырожденной, так как
$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, \underset{k}{0}, *, \dots, *). \tag{5}$$

Рассмотрим кривую $r = r(t)$ на многообразии, заданном уравнением $r = r(u^1, \dots, u^k)$. Касательный вектор к кривой в базисе x^i имеет координаты $(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^k)$. Тогда в локальном базисе этот вектор имеет координаты $(\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n)$. В самом деле, имеем $v = \frac{dr}{dt} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = (\frac{\partial x^1}{\partial u^i}\dot{u}^i, ..., \frac{\partial x^n}{\partial u^i}\dot{u}^i) = \frac{\partial r}{\partial u^i}\dot{u}^i = m_i\dot{u}^i$.

Теорема 4.6. *Координаты на k-мерном многообразии всегда можно расширить до координат во всём пространстве $\mathbb{R}^n$ так, что некоторая окрестность многообразия будет задаваться в этих координатах системой $u^{k+1} = \ldots = u^n = 0$.*

□ К векторам $m_1, \dots, m_k$ в точках A на многообразии с координатами $(u^1, ..., u^k)$ добавим векторы $m_{k+1}, \dots, m_n$, $m_i = m_i(u^1, ..., u^k)$, таким образом, чтобы $m_1, ..., m_n$ были линейно независимы. Это можно сделать многими способами, например, в малой окрестности некоторой точки A_0 их можно взять постоянными. Устроив процесс ортогонализации, можно, оставив при $i \leq k$ прежние векторы $m_1, ..., m_k$, заменить остальные, которые составят в каждой точке A базисы ортогональных дополнений к линеным оболочкам $m_1, ..., m_k$.

Далее положим $r = r(u^1, ..., u^k) + u^{k+1}m_{k+1} + ... + u^n m_n$, где $r(u^1, ..., u^k)$ - радиус вектор k-поверхности. Утверждаем, что $u^1, ..., u^n$ - криволинейные координаты вблизи поверхности (которая, очевидно, реализуется как $u^{k+1} = ... = u^n = 0$). В самом деле, $\frac{\partial r}{\partial u^i} = m_i + \sum_{j=k+1}^n u_j \frac{\partial m^j}{\partial u^i} = \widetilde{m}_i$ при $i \leq k$ и $\frac{\partial r}{\partial u^j} = m_j$ при $j > k$. Очевидно, что при малых $u^{k+1}, ..., u^n$ векторы $\widetilde{m_1}, ..., \widetilde{m_k}, m_{k+1}, ..., m_n$ линейно независимы, т.е. выполнено условие, фигурирующее в п. 4.1 выше.

■

Заметим, что векторы $\widetilde{m_1}, ..., \widetilde{m_k}$ в предыдущей теореме определены не только на поверхности, но и в её окружении, а на самой поверхности превращаются в $m_1, ..., m_k$.

4.3. Евклидова метрика в криволинейных координатах

Евклидова метрика в криволинейных координатах - это форма записи обычного скалярного произведения в координатах, не являющихся не только ортонормированными, но даже и аффинными. Заметим, что теория - полный аналог описания первой квадратичной формы поверхностей.

В криволинейных координатах $u^1, ..., u^n$ возникают локальные базисы $m_1, ..., m_n$, $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$ (см. п. 4.1). Матрица Грама $G = \{(m_i, m_j)\}$ скалярного произведения в этих базисах не постоянна, $G = G(u^1, ..., u^n)$. Пусть, как и в случае поверхностей, $(m_i, m_j) = g_{ij} = g_{ij}(u^1, ..., u^n)$.

Поскольку при переходе к новым координатам $(v^1, ..., v^n)$ матрицей перехода к базису $m'_i = \frac{\partial r}{\partial v^i}$ служит матрица Якоби $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$, имеем закон преобразования матриц Грама: $G' = J^t G J$. В тензорной форме $g'_{ij} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}$. В самом деле $g'_{ij} = (m'_i, m'_j) = (\frac{\partial r}{\partial v^i}, \frac{\partial r}{\partial v^j}) = (\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}, \frac{\partial r}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}) = (m_\alpha, m_\beta)\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}$.

Поскольку для кривой $r = r(t)$ возможна запись $(u^1(t), ..., u^n(t))$, см. п. 4.1, причём, $(\dot{u}^1, ..., \dot{u}^n)$ - координаты $v = \frac{dr}{dt}$ в базисе $m_1, ..., m_n$ (взятом в точке $r(t)$), имеем $|v| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}$. Длина дуги запишется как $s = \int \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}dt = \int \sqrt{g_{ij}du^i du^j}$. Таким образом, достаточно знать $ds = |v|dt$, или $ds^2 = |v|^2dt^2, ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ (так как для конкретных $(u^1(t), ..., u^n(t))$ имеем $du^i = \dot{u}^i dt$).

Для криых $r(t), \widetilde{r}(\tau)$, пересекающихся в точке, в терминах криволинейных координат вычисляется угол пересечения:

$$cos\varphi = \frac{(dr, d\widetilde{r})}{|dr||d\widetilde{r}|} = \frac{g_{ij}du^i d\tilde{u}^j}{\sqrt{g_{ij}du^i du^j}\sqrt{g_{ij}d\tilde{u}^i d\tilde{u}^j}} = \frac{g_{ij}\dot{u}^i \dot{u}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i \dot{u}^j}\sqrt{g_{ij}\dot{\tilde{u}}^i \dot{\tilde{u}}^j}}$$

Ещё один способ получения преобразования членов g_{ij} при переходе к новым координатам: $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}dv^i\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}dv^j = (g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j})dv^i dv^j$.

Приведённые выкладки ничем не отличаются от применявшихся в теории поверхностей по отношению к первой квадратичной форме.

Добавим, что в криволинейных координатах можно свободно вычислять ещё и объёмы фигур. Известно, что объём области $W \subset \mathbb{R}^n$ вычисляется как $\int ... \int_W dx^1...dx^n$. При переходе к криволинейным координатам (в терминах анализа - при замене переменных $x^i = x^i(u^1, ..., u^n)$), как известно из курса анализа, $V = \int ... \int_W |J|du^1...du^n$, где J - матрица Якоби $\{\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\}$. В прямоугольных координатах $G = E$, при переходе к $u^1, ..., u^n$ имеем $G' = J^t E J = J^t J$. Таким образом, окончательно $V = \int ... \int_W \sqrt{|G|}du^1...du^n$, где G - матрица Грама (переменная) в базисах $m_1, ..., m_n$, $m_i = m_i(u^1, ..., u^n)$.

Понятно, что в ортонормированных координатах $G = E$ - единичная матрица, а в любых аффинных G - постоянная матрица.

Предложение 4.7.

1. *$G = E$ тогда и только тогда, когда координаты - стандартные ортонормированные;*

2. *матрица G постоянна только для обычных аффинных координат.*

$\square$ В самом деле, пусть в некоторых (возможно, криволинейных) координатах $u^1, ..., u^n$ в области $O \subset \mathbb{R}^n$ оказалось, что $G = E$. Рассмотрим "карту"O - область U изменения параметров $u^1, ..., u^n$, $U \subset \widetilde{\mathbb{R}^n}$, где $u^1, ..., u^n$ - уже стандартные ортонормированные координаты. Дано, что соответсвие $U \leftrightarrow O$ есть изометрия, но при изометрии кратчайшим линиям в U отвечают кратчайшие в O, следовательно, u^i-линиям в U (параллельным координатным осям) отвечают кратчайшие в O. Таким образом, u^i-линии в O суть прямые. Поскольку $|m_i| = \sqrt{g_{ii}} = 1$, и $(m_i, m_j) = g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то координаты в O - обычные ортонормированные.

Если матрица Грама постоянна, то (с учётом её симметрии и положительной определённости) найдётся матрица перехода C такая что $G' = C^t G C = E$. Рассмотрим замену координат u^i линейными выражениями от $v^1, ..., v^n$, определяемыми строками C (для этой замены $J = C$). По доказанному выше $v^1, ..., v^n$ - ортонормированные координаты. Следовательно, $u^1, ..., u^n$ - аффинные координаты, получаемые при обратной линейной замене $v^1, ...v^n$ $\blacksquare$

Рассмотрим примеры криволинейных координат.

1° Полярные координаты:

$r = (x, y), x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = (cos\varphi, sin\varphi), m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\rho sin\varphi, \rho cos\varphi), G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix},\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$.

2° Цилиндрические координаты:

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z,\ m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = (cos\varphi, sin\varphi, 0), m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\rho sin\varphi, \rho cos\varphi, 0), m_3 = \frac{\partial r}{\partial z} = (0, 0, 1), G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$.

3° Сферические координаты: ρ - расстояние точки от начала координат, φ - полярный угол проекции точки на Oxy, θ - угол r с осью Oz.

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta, m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = (cos\varphi sin\theta, sin\varphi sin\theta, cos\theta),$$

$m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \rho(-sin\varphi sin\theta, cos\varphi sin\theta, 0),\ m_3 = \rho(cos\varphi cos\theta, sin\varphi cos\theta, -sin\theta), G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix},\ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Имеем $G = \rho^4 sin^2\theta = |J^t J|$, поэтому $|J| = \rho^2 sin\theta$. Якобиан вырожден для точек оси Oz.

4.4. Первая квадратичная форма (метрика) k-поверхности в $\mathbb{R}^n$

Пусть $r = r(u^1, ..., u^k)$ - гладкая k-поверхность в $\mathbb{R}^n$. В соответствии с теоремой 4.6 выше вблизи любой точки криволинейные координаты $u^1, ..., u^k$ включаются в криволинейные координаты $u^1, ..., u^k, u^{k+1}, ..., u^n$ окрестности этой точки в $\mathbb{R}^n$. Пусть G - матрица евклидовой метрики в этой окрестности. Тогда её верхний левый $(k \times k)$-квадрат G_k, определяемый членами $g_{ij}(u^1, ..., u^k, 0, ...0)$, является, очевидно, матрицей Грама векторов $m_1, ..., m_k$, касательных к поверхности, $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}, i \le k$. При переходе к другим координатам $(v^1, ..., v^k)$ на k-поверхности матрица преобразуется по закону $G'_k = J_k^t G_k J$, где $J_k =$ матрица Якоби $\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$, $i, j \le k$ (поскольку $g_{ij} = (m_i, m_j)$, $g'_{ij} = (m'_i, m'_j)$).

Матрицы G_k - это матрицы ограничения обычного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ на векторы, касательные к k-поверхности. Поэтому они свободно используются для тех же целей, что и матрицы G в $\mathbb{R}^n$ (или матрицы G первой квадратичной формы поверхности в $\mathbb{R}^3$), но только для кривых и фигур, расположенных на k-поверхности. В частности, для выражения квадрата дифференциала длины дуги: $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$, $(1 \le i, j \le k)$, для участвующего в определении косинуса угла пересечения двух кривых скалярного произведения их дифференциалов $(dr, d\tilde{r}) = g_{ij}du^i d\tilde{u}^j$, $(1 \le i, j \le k)$ и.т.п. Объём k-мерной области W, расположенной на k-поверхности, определеяется интегралом $W = \int ... \int \sqrt{|G_k|}du^1...du^k$ (ср. следующий п.).

Аналогичными способами (ср с п.4.3 и п. 3.1) получаются тензорные выражения $g'_{ij} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial v^j}$ для преобразования членов матриц G_k,G'_k при переходе к другим криволинейным координатам, $(1 \le i, j, \alpha, \beta \le k)$

Выражение $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ называется метрикой (или первой квадратичной формой) k-поверхности в $\mathbb{R}^n$.

4.5. Риманова метрика

Определение. Будем говорить, что в области U с криволинейными координатами $(u^1, ..., u^n)$ задана *риманова метрика*, если:

1° В каждой точке $x \in U$ задана симметричная положительно определённая матрица $G = \{g_{ij}(x)\}$;

2° Функции $g_{ij}(x)$ гладкие (по координатам $(x^1, ..., x^n)$ или, эквивалентно, $(u^1, ..., u^n)$);

3° При переходе к другим координатам $(v^1, ..., v^n)$ матрица G преобразуется по правилу $G' = J^t G J$, где J — матрица Якоби, $J = \{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$.

В этом случае для закреплённых в любой точке $x \in U$ (с координатами $(x^1, ..., x^n)$ или с криволинейными координатами $(u^1, ..., u^n)$) векторов a, b определено скалярное произведение $(a, b) = g_{ij}(u^1, ..., u^n)a^i b^j$, где $(a^1, ..., a^n), (b^1, ..., b^n)$ - координаты a и b в локальном базисе $m_1, ..., m_n$ в точке x, $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $i = 1, ..., n$. Для самих векторов m_i, m_j, имеющих координаты вида $(0, ..., 0, 1_i, 0, ..., 0)$, $(m_i, m_j) = g_{ij}$ - геометрический смысл компонент g_{ij}.

Если иметь в виду задание матрицей $G = G(u^1, ..., u^n)$ скалярных произведений, то требование 3 определения выше - следствие требований **1°** и **2°**.

Может показаться, что рассматриваемое определение ничем не отличается от описания евклидова скалярного произведения (метрики Евклида) в криволинейных координатах, данного в п. 4.3. Отличие однако есть, причём очень существенное. Для ситуации, описанной в п. 4.3, найдутся координаты (аффинные, ортогональные), в которых матрицы оказываются не зависящими от параметров $u^1, ..., u^n$, т.е. постоянными. Для римановых метрик это типично не так, указанных координат типично не существует.

Так же, как и в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$, как в п. 4.3 и 4.4, тензор G может быть использован для вычисления длин дуг различных линий, косинуса угла между пересекающимися кривыми в U, для вычисления объёмов расположенных в U фигур. Однако, в отличие от предыдущих ситуаций, где все перечисленные объекты нам знакомы и названные задачи не вызывают сомнений, в данной новой ситуации мы должны проверить корректность даваемых определений - независимость от использованных криволинейных координат и от способов параметризации кривых.

Независимость от координат величин, использующих скалярные произведения векторов (в частности, модулей векторов) - следствие из линейной алгебры (законы преобразования матрицы G и координат векторов). Независимость длины дуги от параметризации - из того, что $ds = \frac{dr}{dt}dt = (\frac{dr}{d\tau})\tau'_t dt = \frac{dr}{d\tau}d\tau$. В формуле $cos\varphi = \frac{(dr, d\tilde{r})}{|dr||d\tilde{r}|}$ появляющиеся при замене параметров на кривых одинаковые множители в числителе и знаменателе сокращаются.

Объём в римановой метрике не зависит от выбора координат, так как если $G' = J^t G J$, то

$$V = \int\limits_\omega \sqrt{|G'|}dv^1 \dots dv^n = \int\limits_\omega \sqrt{|J^t||G||J|}dv^1 \dots dv^n = \int\limits_\omega \sqrt{|G|}\underbrace{|J|dv^1 \dots dv^n}_{\text{замена}} = \int\limits_\omega \sqrt{|G|}du^1 \dots du^n \qquad (6)$$

Примерами римановых метрик являются:

1. Евклидова метрика в криволинейных координатах;

2. Певая квадратичная форма поверхности, рассматриваемая на карте;

3. Аналогично - первая квадратичная форма k-поверхности, отнесённая к области изменения криволинейных координат $u^1, ..., u^k$.

В 2, 3 метрики индуцированы евклидовой метрикой объемлющего поверхность пространства. Римановы метрики могут индуцироваться на поверхностях и в псевдоевклидовых пространствах.

4.6. Изометрия метрик

Определение. Пусть даны области $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ с метриками Римана G и $\widetilde{G}$ соответственно. Говорят, что метрики G и $\widetilde{G}$ *изометричны*, если существует диффеоморфизм областей U и $\widetilde{U}$, сохраняющий длины кривых.

Например, изометричны две карты одного и того же участка поверхности.

Замечание. Аналогично определяется изометрия k-поверхностей.

Теорема 4.8. *Метрики G и $\widetilde{G}$ изометричны $\Leftrightarrow$ метрические тензоры G и $\widetilde{G}$ совпадают в некоторых криволинейных координатах областей U и $\widetilde{U}$.*

$\square$ Пусть $G = \widetilde{G}$ в криволинейных координатах $\left(u^1, \ldots, u^n\right)$ области U и координатах $\left(\widetilde{u}^1, \ldots, \widetilde{u}^n\right)$ области $\widetilde{U}$. Построим искомый диффеоморфизм. Точке $(u^1, \ldots, u^n) \in U$ в координатах $\left\{u^i\right\}$ поставим в соответствие точку с теми же самыми координатами $\tilde{u}^i = u^i$. Очевидно, что это отображение гладкое, удовлетворяет определению изометрии.

Пусть теперь нам дано, что существует диффеоморфизм f областей U и $\widetilde{U}$, сохраняющий длины кривых, $f(x^1, ..., x^n) = (y^1, ..., y^n) \in \widetilde{U}$, $y^i = y^i(x^1, ..., x^n)$, $i = 1, ..., n$. Последние выражения в $\widetilde{U}$ можно рассмативать как переход к криволинейным координатам $u^1, ..., u^n$ $(u^i = x^i)$. Покажем, что именно в этих координатах $x^1, ..., x^n$ для $\widetilde{U}$ имеем $\tilde{G} = G$.

Лемма 4.9. *Длины векторов при изометрии сохраняются.*

$\square$ Проведем в области U кривую с касательным вектором v, ее образ в $\widetilde{U}$ имеет касательный вектор $\widetilde{v}$. Допустим, что в некоторой точке $|v| \neq |\widetilde{v}|$ (для определённости $|v| < |\widetilde{v}|$). Тогда неравенство верно и в некоторой окрестности этой точки. Значит, $\int |v| dt < \int |\widetilde{v}| dt$, т. е. длина кривой не сохранилась. Противоречие. $\blacksquare$

Линии x^i в U переходят при f в u^i-линии, касательные векторы $e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$ - в векторы $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$ в $\widetilde{U}$, векторы $v = \frac{dr}{dt} = \dot{x}^i e_i$ - в $\tilde{v} = \frac{\partial r}{\partial u^i} \dot{u}^i = m_i \dot{u}^i$, причём $(\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n) = (\dot{u}^1, ..., \dot{u}^n)$. Следовательно, суммы и линейные комбинации векторов - в суммы и такие же линейные комбинации образов этих векторов.

Из леммы следует, что сохраняются все скалярные квадраты. Но скалярное произведение двух произвольных векторов можно выразить через скалярные квадраты по формуле $(a, b) = \frac{1}{2}\big((a+b, a+b) - (a, a) - (b, b)\big)$, а значит f сохраняет и скалярное произведение любых векторов. В частности, $g_{ij} = (e_i, e_j) = (m_i, m_j) = \widetilde{g}_{ij}$. Теорема доказана. $\blacksquare$

Следствие 4.10. *Изометрия влечет полное совпадение геометрий (углы, длины, объемы и т. д. одинаковы), поскольку все эти величины описываются через метрические тензоры.*

Рассмотрим несколько примеров эквивалентных метрик.

Пример. Метрика $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$ на плоскости переменных u, v эквивалентна евклидовой метрике в полярных координатах $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$. Геометрия на этой плоскости эквивалентна евклидовой геометрии на плоскости Oxy.

Пример. Рассмотрим цилиндрические координаты, они задают метрику $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$. На поверхности цилиндра $\rho = \mathrm{const}$, а это значит, что метрика цилиндрической поверхности имеет вид $ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2$. При замене координат $x = a\varphi,\ y = z$, получим $dx = a d\varphi,\ dy = dz$, и метрика принимает вид $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Таким образом, внутренняя геометрия на цилиндре локально евклидова.

Пример. Пусть дана область $U \subset \mathbb{R}^n$ с римановой метрикой $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$. Пусть $\widetilde{U}$ — карта области U (с аффинными координатами $u^1, ..., u^n$). Записи метрик в U и $\widetilde{U}$ совпадут, следовательно, области изометричны.

Вообще, метрика эквивалентна евклидовой, если в некоторой системе координат $G = E$. Но как узнать, существует или нет такая система координат для данной римановой метрики? Мы решим эту задачу в настоящем курсе для $n = 2$, см. п. 7.18 (общий случай - в последующем курсе по дифференциальной геометрии и топологии).

Заметим, что на кривой любая метрика эквивалентна евклидовой, так как $ds^2 = |v|^2 dt^2$ и всегда можно перейти к натуральному параметру, при котором $|v| = 1$ и $g_{11} = 1$, $G = E$, т.е. в одномерном случае нет внутренней геометрии, есть только внешняя - геометрия расположения в $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно убедиться, что (внутренняя) геометрия на любой цилиндрической и на любой конической поверхности локально изометрична евклидовой.

5. Псевдоевклидовы пространства

Как отмечалось выше, положительно определённая метрика (первая квадратичная форма) на k-поверхностях в n-мерных пространствах может определяться не только обычным скалярным произведением, но и псевдоевклидовыми скалярными произведениями. Для этого сделаем краткий экскурс в теорию.

5.1. Основные понятия. Базисы и подпространства

Определение. Пространство V над $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если на нем задано скалярное произведение (a,b), т.е. симметричная положительно определённая билинейная функция:
1° $(a,b)=(b,a)$;
2° $(a_1+a_2,b)=(a_1,b)+(a_2,b)$;
3° $(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$;
4° $(a,a)>0$, если $a\neq 0$.
Базис называется *ортонормированным*, если в нём матрица Грама единичная. Что получится, если в определении (a,b) отбросить требование **4°**?

Известно, что любую симметричную билинейную функцию можно привести к *нормальному виду*:

$$\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 & \\ & 1\end{matrix}\right\} p & & \\ & \left.\begin{matrix}-1 & \\ & -1\end{matrix}\right\} q & \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Определение. Число $p+q$ называется *рангом* билинейной функции, а $(p-q)$ — *сигнатурой*. Число p называется положительным *индексом инерции*, а q — отрицательным.

Определение. Базис пространства называется *ортонормированным* по отношению к (a,b), если в нем матрица Грама имеет нормальный вид. Пространство V со скалярным произведением (a,b) называется *изотропным*, если существует такой ненулевой вектор $a\in V$, что $a\perp V$, т. е. $(a,x)=0\ \forall x\in V$.

Теорема 5.1. *Пространство V изотропно $\Leftrightarrow$ скалярное произведение на нём вырождено.*

□ Пусть скалярное произведение вырождено, тогда в нормальном виде будут нули на диагонали, и достаточно взять базисный вектор e_n, тогда $(e_n,x)=0\ \ \forall x\in V$, т. е. пространство изотропно. Если же оно невырождено, то в базисе, соответствующем нормальному виду, для любого вектора $a=(x^1,\ldots,x^n)$ имеем $(a,x)=0\ \forall x\ \Leftrightarrow\ (a,e_i)=\pm x^i=0$, т. е. все координаты нулевые. ■

Геометрия изотропных пространст далека от евклидовой. Заметим, однако, что требование 4 обеспечивает невырожденность классического скалярного произведения. В связи с этим принимаем

Определение. Пространство V над $\mathbb{R}$ называется псевдоевклидовым, если билинейная функция (a,b) (скалярное произведение) невырождена.

Псевдоевклидово пространство обозначается как $\mathbb{R}^n_q$. Очевидно, что $R^n_q\sim\mathbb{R}^n_{n-q}$. В частности, $R^n\sim\mathbb{R}^n_0\sim\mathbb{R}^n_n$.

Определение. *Ортогональным дополнением* к подпространству $W\subset V$ называется подпространство

$$W^\perp:=\{a\colon a\perp W\}=\{a\colon (a,x)=0\ \forall x\in W\}. \tag{2}$$

Далее будем считать, что пространство V псевдоевклидово.

Теорема 5.2. *Пусть дано пространство V и подпространство $W\subset V$. Тогда* $\dim W^\perp=\dim V-\dim W$.

□ Пусть $V=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$, и этот базис ортонормированный. Возьмем вектор $x=(x^1,\ldots,x^n)$. Пусть $W==\langle a_1,\ldots,a_k\rangle$, и пусть $a_i=(a_i^1,\ldots,a_i^n)$ в базисе V. Имеем $x\perp W\ \Leftrightarrow\ (x,a_i)=0,\ i=1,...,k$. Получаем систему

$$a_i^1x^1+\ldots+a_i^px^p-a_i^{p+1}x^{p+1}-\ldots-a_i^nx^n=0,\quad i=1,...,k. \tag{3}$$

Векторы a_i линейно независимы, следовательно, ранг её равен k и размерность пространства решений равна $n-k$, т.е. $\dim W^\perp=n-k$. ■

Следствие 5.3. $(W^\perp)^\perp=W$.

□ В самом деле, очевидно, что $W\subset(W^\perp)^\perp$. Но из теоремы следует, что $\dim(W^\perp)^\perp=n-(n-k)==k=\dim W$, а это означает, что строгого вложения быть не может. ■

Теорема 5.4. *Подпространство W изотропно тогда и только тогда, когда $W\cap W^\perp\neq\{0\}$.*

□ Если $a\neq 0$ и $a\in W\cap W^\perp$, то $a\perp W$ и W изотропно. Если W изотропно, то существует $a\neq 0$, такой что $a\in W$ и $a\perp W$, т. е. $a\in W^\perp$ и $W\cap W^\perp\neq\{0\}$. ■

Следствие 5.5. *W изотропно тогда и только тогда, когда $W^\perp$ тоже изотропно. $V = W \oplus W^\perp$ тогда и только тогда, когда W не является изотропным (эквивалентно - $W^\perp$).*

Все изотропные векторы, т. е. такие что $(a,a)=0$, образуют изотропный конус, задаваемый уравнением

$$\left(x^1\right)^2 + \ldots + \left(x^p\right)^2 - \left(x^{p+1}\right)^2 - \ldots - \left(x^n\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Теорема 5.6. *В псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_q$ существуют изотропные подпространства любой размерности от 1 до $n-1$.*

$\square$ Утверждение верно для $\mathbb{R}^2_1$. В силу следствия 5.5 $\mathbb{R}^n_q = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1}_q$, поэтому (по индуктивному предположению) в $\mathbb{R}^n_q$ найдутся изотропные подпространства всех размерностей $\leq n-2$. Изотропные подпространства размерности $n-1$ в силу теоремы 5.2 и следствия 5.5 - это ортогональные дополлнния к изотропным векторам. $\blacksquare$

Теорема 5.7. *Любой неизотропный вектор можно включить в ортонормированный базис, умножив на подходящий коэффициент λ.*

$\square$ Проведём индукцию по размерности пространства $n = \dim V$. При $n=1$ базис состоит из одного вектора λa, где λ — такое число, что $(\lambda a, \lambda a) = \pm 1$. Шаг индукции: пусть теорема доказана для размерности $\dim V < n$. Возьмем $W := \langle a \rangle$ — одномерное неизотропное подпространство, тогда $W^\perp$ будет $(n-1)$-мерным неизотропным подпространством, а в нём по предположению индукции существует ортонормированный базис. Остаётся к нему добавить λa (пользуемся следствием 5.5). $\blacksquare$

5.2. Псевдоортогональные матрицы и операторы

Определение. Через E_q будем обозначать диагональную матрицу размерности n, с p еденицами и q минус еденицами на диагонали. Такие матрицы будем называть *псевдоединичными.* Матрица называется *псевдоортогональной*, если она есть матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Теорема 5.8. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *C — псевдоортогональная матрица;*
2. *$C^t E_q C = E_q$;*
3. *$C^{-1} = E_q C^t E_q$;*
4. *C^t также псевдоортогональна.*

$\square$ $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ $G' = C^t G C$, поэтому условие 2 означает, что C - матрица перехода между ортонормированными базисами ($G' = G = E_q$).

а так как базисы ортонормированны, то $G' = G = E_q$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $C^t E_q C C^{-1} = E_q C^{-1} \ \Rightarrow\ C^t E_q = E_q C^{-1} \ \Rightarrow\ E_q C^t E_q = C^{-1}$, так как $E_q E_q = E$.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ $C^{-1} E_q = E_q C^t \Rightarrow C C^{-1} E_q = C E_q C^t \Rightarrow E_q = C E_q C^t = (C^t)^t E_q C^t$, следовательно, по условию 2 матрица C^t также будет псевдоортогональной.

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Из псевдоортогональности C^t следует псевдоортогональность $(C^t)^t = C$

$\blacksquare$

Следствие 5.9.

1. *Псевдоортогонгальность матрицы по столбцам эквивалентна её псевдоортогональности по строкам.*

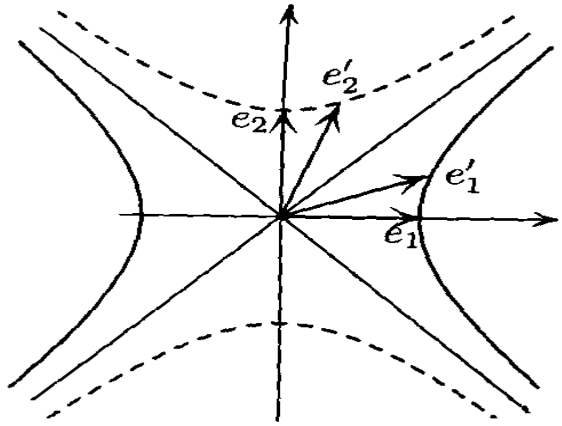
2. *Для псевдоортогональных матриц $detC = \pm 1$.*

Определение. Оператор $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n_q \to \mathbb{R}^n_q$ называется *псевдоортогональным*, если $\big(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y\big) = (x,y)$.

Очевидно, что оператор псевдоортогонален $\Leftrightarrow$ его матрица в ортонормированном базисе псевдоортогональна $\Leftrightarrow$ он переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

5.3. Геометрия плоскости $\mathbb{R}^2_1$

Определение. *Псевдодлиной* неизотропного вектора называется величина $|a| := \sqrt{(a,a)}$. *Псевдодлиной* правильно параметризованной кривой, т. е. такой, что $v \neq 0$ и $(v,v) \neq 0$, называется величина $s(t) = \int\limits_0^t |v| dt$.



Псевдодлина кривой не зависит от параметризации по тем же причинам, что и обычная длина. Она сохраняется при псевдоортогональном преобразовании, так как оно сохраняет скалярное произведение.

Теперь рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2_1$. В нём скалярное произведение задаётся в хорошем базисе формулой $(a,b) = xx' - yy'$, и два вектора будут ортогональными, если они симметричны относительно прямой $y = x$ или $y = -x$. Концы всех единичных векторов лежат на гиперболе $x^2 - y^2 = 1$, концы мнимоеденичных - на $x^2 - y^2 = -1$.

Стандартный базис e_1, e_2 при псевдоортогональном отображении может перейти, например, в ортонормированный базис $e_1' = (X, Y)$, $e_2' = (Y, X)$. Следовательно, матрица перехода может иметь один из следующих видов:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Параметризуем единичную псевдоокружность, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 1$. Выражая x через y, получим $r(t) = (\pm\sqrt{1+t^2}, t)$.

Найдём вектор скорости:

$$\dot{r} = (\pm\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1), \quad (v,v) = \frac{-1}{1+t^2}, \quad |v| = \frac{i}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{6}$$

Пусть σ — псевдодлина псевдоокружности. Тогда

$$\sigma(t) = i\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = i\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right). \tag{7}$$

В данном случае длина получилась чисто мнимая. Это не очень удобно, поэтому имеет смысл вынести i и считать псевдодлиной овеществление полученного выражения. Вспоминая, что в нашей параметризации $y = t$, окончательно получаем

$$\sigma = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right). \tag{8}$$

Выражая y через σ, получаем параметризацию псевдоокружности через её длину:

$$y = \frac{e^\sigma - e^{-\sigma}}{2} = \operatorname{sh}\sigma, \quad x = \operatorname{ch}\sigma. \tag{9}$$

Таким образом, если псевдодлину использовать в качестве параметра, то все псевдоортогональные матрицы имеют один из четырех видов:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ -\operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & -\operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & -\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\sigma & -\operatorname{sh}\sigma \\ -\operatorname{sh}\sigma & -\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Определение. *Псевдовращением* называется преобразование с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sigma & \operatorname{sh}\sigma \\ \operatorname{sh}\sigma & \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Вектор называется *единичным*, если $(a,a)=1$, и *мнимоединичным*, если $(a,a)=-1$. Если векторы a и b оба единичные, то $(a,b)=\operatorname{ch}\theta$, где θ — длина дуги псевдоокружности между концами векторов. Если векторы мнимоединичные, то $(a,b)=-\operatorname{ch}\theta$. В самом деле, примем за e_1 вектор a, тогда $a=(1,0)$ и $b=(\operatorname{ch}\theta,\operatorname{sh}\theta)$. Следовательно $(a,b)=\operatorname{ch}\theta$. Второй случай доказывается аналогично $(a=e_2=(0,1), b=(sh\theta,ch\theta))$.

На $\mathbb{R}^2_1$ возникает гиперболическая тригонометрия. Вычислим $\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)$. Пусть $a=(\operatorname{ch}\theta_1,\operatorname{sh}\theta_1)$ и $b=(\operatorname{ch}\theta_2,-\operatorname{sh}\theta_2)$. Это еденичные векторы, расположенные в правых четвертях координатной плоскости, поэтому

$$\operatorname{ch}(\theta_1+\theta_2)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2+\operatorname{sh}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2. \tag{12}$$

Формулы для косинуса и синуса суммы могут быть получены и как следствие того, что матрица вида (11) для $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ равна произведению аналогичных матриц для σ_1 и σ_2.

Пусть $\beta:=\operatorname{th}\sigma=\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\sigma}$, тогда

$$1-\beta^2=1-\frac{\operatorname{sh}^2\sigma}{\operatorname{ch}^2\sigma}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\sigma}\ \Rightarrow\ \operatorname{ch}\sigma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \operatorname{sh}\sigma=\operatorname{th}\sigma\operatorname{ch}\sigma=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{13}$$

Если использовать β в качестве параметра, то псевдоортогональные матрицы примут вид:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{pmatrix} \tag{14}$$

5.4. Преобразования в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_q$

Зафиксируем в пространстве V некоторый базис, тогда существует взаимно однозначное соответствие между отображениями $f\colon V\to V$ и их матрицами C_f. Все преобразования пространства, очевидно, образуют группу. Рассмотрим группы ортогональных и псевдо-ортогональных преобразований $\mathbf{O}(n)$ и $\mathbf{O}(n,q)$ соответственно.

Теорема 5.10. *Группа $\mathbf{O}(n)$ состоит из двух компонент: собственных и несобственных преобразований.*

□ В группе $\mathbf{O}(n)$ есть по меньшей мере 2 компоненты: $\det C=1$ и $\det C=-1$. Они разные, поскольку матрицу с положительным определителем нельзя непрерывно перевести в матрицу с отрицательным определителем, сохранив невырожденность матрицы. Докажем, что компонент ровно 2. Пусть $\mathcal{A}\in\mathbf{O}(n)$ — какое-то преобразование. Существует базис $e'_1,...,e'_n$, в котором его матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}E & & & & \\ & R(\varphi_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R(\varphi_m) & \\ & & & & -E\end{pmatrix}, \tag{15}$$

где первые k векторов отображаются тождественно (подматрица E), последние l векторов умножаются на -1 (подматрица $-E$), а $R(\varphi_i)$ представляют собой двумерные повороты на некоторые углы φ_i. Непрерывно изменяя углы φ_i, можно добиться того, что все блоки $R(\varphi_i)$ будут единичными. Сгруппировав минус единицы в пары, заметим, что матрица $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ есть матрица поворота на угол π. Значит, такие блоки также можно перевести в единичные, после чего матрица превратится либо в единичную, либо в матрицу с одной -1 на последнем месте.

Базис $e'_1,...,e'_n$ без ограничения общности можно считать положительно ориентированнным. По доказанной части его можно как жесткое целое непрерывным процессом перевести в стандартный $e_1,...,e_n$. Тогда оператор умножения на -1 по оси e'_n перейдёт в такой же оператор по отношению к e_n. Тем самым оператор $\mathcal{A}$ перейдёт в оператор с матрицей E_1 относительно основного базиса $e_1,...,e_n$. ■

Теперь рассмотрим группу $\mathbf{O}(3,1)$. Скалярное произведение в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^3_1$ задаётся формулой $(a,b)=xx'+yy'-zz'$. Изотропные векторы лежат на конусе $x^2+y^2-z^2=0$. Поверхность $x^2+y^2-z^2=1$ называют единичной *псевдосферой*, а $x^2+y^2-z^2=-1$ — мнимоединичной псевдосферой.

Посмотрим, где могут лежать векторы ортонормированного базиса (e'_1,e'_2,e'_3). Вектор e'_3 лежит на двуполостном гиперболоиде, а e'_1 и e'_2 - на однополостном. Пусть $e'_3=(\alpha,\beta,\gamma)$, тогда e'_1 и e'_2 лежат в ортогональном дополнении, т. е. имеют такие координаты (x,y,z), что $\alpha x+\beta y-\gamma z=0$. Эта плоскость является сопряженной плоскостью к e_3. Сечение однополостного гиперболоида плоскостью, на которой лежат концы векторов e'_1 и e'_2, является эллипсом. Таким образом, ортонормированные базисы — это в точности тройки взаимносопряженных векторов (поскольку ортогональное дополнение к любому из них - это сопряжённая плостксть в терминологии аналитической геометрии).

Заметим, что эти наблюдения не являются чем-то исключительным только для $\mathbb{R}^3_1$ - в обычной геометрии $\mathbb{R}^3$ ортогональность есть сопряженность по отношению к обычной сфере.

Теорема 5.11. *Группа* $\mathbf{O}(3,1)$ *состоит из 4 компонент.*

$\square$ По аналогии с предыдущей теоремой легко видеть, что имеется как минимум 4 компоненты. Ориентация (e_1', e_2') может сохраняться или не сохраняться, и вектор e_3' может оказаться либо на верхней полости гиперболоида, либо на нижней. Очевидно, что непрерывно из одной компоненты в другую перейти нельзя. Остаётся показать связность каждой из них. Рассмотрим случай компоненты $\mathbf{SO}(3,1)$, содержащей единичную матрицу. Рассмотрим в $\mathbf{SO}(3,1)$ какой-нибудь ортонормированный базис (e_1', e_2', e_3'). Как уже говорилось, векторы e_1' и e_2' лежат на эллипсе. Непрерывным перемещением по этому эллипсу переместим e_1' в вектор e_1'' большей полуоси эллипса, при этом e_2', как сопряжённый к e_1', переместится в вектор e_2'' меньшей полуоси. Сохраняется сопряжённость с e_3' (т.е. ортогональность). Далее повращаем пространство вокруг оси Oz так, чтобы e_3' переместился в первый квадрант плосткости Oxz (такое вращение псевдоортогонально, поскольку образы базисных векторов e_1, e_2, e_3 остаются ортогонормированными в смысле $\mathbb{R}^3_1$). При этом e_2'' переместится в e_2. Наконец, двигая по двуполостному гиперболоиду e_3'' до e_3, получим в силу сопряжённости в плоскости Oxz перемещение e_1''' (возникшего из e_1'') в вектор e_1. Тем самым базис e_1', e_2', e_3' соеденился с e_1, e_2, e_3.

В остальных трёх случаях аналогичным образом e_1', e_2', e_3' можно соеденить с одним из базисов $e_1, e_2, -e_3$ или $e_1, -e_2, e_3$ или $e_1, -e_2, -e_3$.

Заметим, что $O(2,1)$ тоже состоит из 4-х компонент, каждая из которых эквивалентна $\mathbb{R}^1$ (т.к. $-\infty < \sigma < \infty$). $\blacksquare$

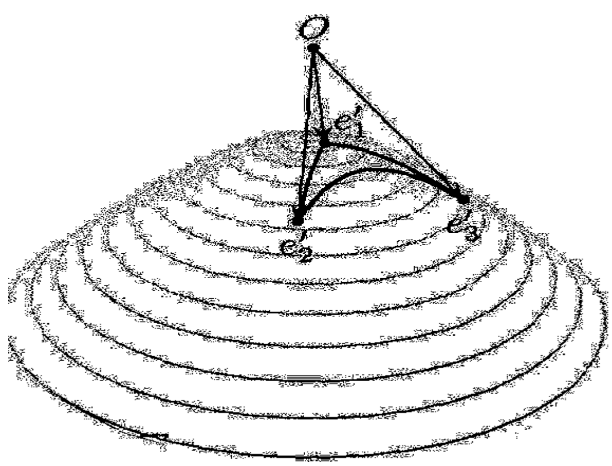
6. Планиметрии Евклида, Лобачевского и Римана

6.1. Геометрия на сфере и псевдосфере

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ и нижнюю полость $\mathbb{L}^2$ двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, т.е. мнимой псевдосферы в пространстве $\mathbb{R}^3_1$. Сферическую геометрию называют *римановой*, а геометрию на псевдосфере — *геометрией Лобачевского.*

Теорема 6.1. *На поверхности* $\mathbb{L}^2$ *из* $\mathbb{R}^3_1$ *индуцируется (риманова) положительно определённая метрика.*

$\square$ Возьмем произвольную точку $A \in \mathbb{L}^2$ и рассмотрим вектор $e_3' := \vec{OA} = (x_0, y_0, z_0)$. Касательная плоскость к $\mathbb{L}^2$ в этой точке имеет уравнение $(x - x_0)x_0 + (y - y_0)y_0 - (z - z_0)z_0 = 0$ и является ортогональным дополнением к e_3'. В этой плоскости $(a, a) > 0$, так как это ортогональное дополнение к мнимомоединичному вектору. $\blacksquare$



Определение. *Прямыми* на сфере будем называть центральные сечения сферы плоскостями. *Прямыми* на плоскости Лобачевского будем называть сечения $\mathbb{L}^2$ плоскостями, проходящими через начало координат. Только эти линии на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ являются локально кратчайшими (п. 7.8, 7.9 и 7.13).

Теперь оправдаем данное определение. Как мы сейчас увидим, для таких прямых выполняется неравенство треугольника.

Теорема 6.2. *Для любых трёх точек* A_1, A_2, A_3 *на* $\mathbb{L}^2$ *или на* $\mathbb{S}^2$*, расстояния между которыми равны* l_1, l_2, l_3*, выполняется неравенство* $l_1 + l_2 \geqslant l_3$*, причём равенство достигается только тогда, когда точки лежат на одной прямой.*

□ **1°** Геометрия Лобачевского. Пусть $e'_i = \vec{OA_i}$. Достаточно доказать, что $\operatorname{ch}(l_1+l_2) \geqslant \operatorname{ch}(l_3)$, так как $\operatorname{ch} x$ монотонно возрастает при $x \geqslant 0$. Следует показать, что

$$\operatorname{ch}(l_1+l_2) = \operatorname{ch} l_1 \operatorname{ch} l_2 + \operatorname{sh} l_1 \operatorname{sh} l_2 = \operatorname{ch} l_1 \operatorname{ch} l_2 + \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_1 - 1}\sqrt{\operatorname{ch}^2 l_2 - 1} \geqslant \operatorname{ch} l_3. \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу Грама $G = (g_{ij})$ для векторов e'_1, e'_2, e'_3. Имеем $\operatorname{ch} l_3 = \operatorname{ch}\big(\angle(e'_1, e'_2)\big) = -g_{12} = (e'_1, e'_2)$, и аналогично $\operatorname{ch} l_1 = -g_{23}$, $\operatorname{ch} l_2 = -g_{13}$. Переписав неравенство (1) через коэффициенты матрицы G, получаем

$$\sqrt{(g_{23}^2-1)\,(g_{13}^2-1)} \geqslant -g_{12} - g_{23}g_{13} \;\Leftrightarrow\; g_{12}^2 + g_{13}^2 + g_{23}^2 + 2g_{12}g_{13}g_{23} - 1 \leqslant 0. \tag{2}$$

Заметим, что в ортонормированном базисе $\det G = \det(E_1) < 0$. Значит, при переходе к базису e'_i знак определителя сохранится, т. е.

$$\det G = \begin{vmatrix} -1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & -1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & -1 \end{vmatrix} < 0, (\textit{вспомним, что } E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ G = C^t E_1 C). \tag{3}$$

В левой части неравенства (2) получилось в точности явное выражение для $\det G$, а мы уже показали, что $\det G < 0$. Равенство может достигаться в точности тогда, когда векторы e'_i лежат в одной плоскости (т. е. на одной прямой Лобачевского), поскольку определитель Грама обратится в нуль.

2° Сферическая геометрия. Доказательство почти аналогично первому пункту. На сфере отрезком считается та из двух дуг центрального сечения, длина которой меньше π. Поэтому в том случае, когда сумма длин двух сторон больше π, неравенство очевидно. В противном же случае достаточно показать, что $\cos(l_1+l_2) \leqslant \cos(l_3)$, так как $\cos x$ монотонно убывает при $x \in [0, \pi]$. Следует показать, что

$$\cos l_1 \cos l_2 - \sqrt{1-\cos^2 l_1}\sqrt{1-\cos^2 l_2} \leqslant \cos l_3. \tag{4}$$

Используя обозначения пункта **1°**, приходим к предполагаемому неравенству

$$g_{23}g_{13} - g_{12} \leqslant \sqrt{(1-g_{23}^2)\,(1-g_{13}^2)} \;\Leftrightarrow\; 1 - g_{12}^2 - g_{23}^2 - g_{13}^2 + 2g_{12}g_{23}g_{13} \geqslant 0. \tag{5}$$

Если векторы e'_i ортонормированы, то их матрица Грама единичная, и $\det G = 1 > 0$. Знак $\det G$ инвариантен, следовательно

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & 1 & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & 1 \end{vmatrix} > 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что и выражение (5), которое совпадает с $\det G$, также всегда положительно (за исключением того случая, когда e_i компланарны). ■

6.2. Группы движений $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Под движениями понимаются изометричные преобразования. Как мы знаем, на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ существует и единственно преобразование, переводящее один ортонормированный репер в такой же другой. Как мы сейчас увидим, сфера и плоскость Лобачевского в этом отношении ничуть не хуже.

Условимся понимать под ортонормированным репером на $\mathbb{S}^2$ или $\mathbb{L}^2$ любую точку с двумя касательными ортогональными друг другу единичными векторами e'_1 и e'_2, саму точку - как конец вектора e'_3.

Теорема 6.3. *Преобразование $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$, переводящее ортонормированный репер в ортонормированный, существует и единственно. Группой движений $\mathbb{S}^2$ является $\mathbf{O}(3)$, а группой движений $\mathbb{L}^2$ — часть группы $\mathbf{O}(3,1)$, сохраняющая нижнюю полость гиперболоида.*

□ Существование следует из того, что существует соответствующее ортогональное преобразование $\mathbb{R}^3$ в случае $\mathbb{S}^2$ и псевдоортогональное - в случае $\mathbb{L}^2$ в $\mathbb{R}^3_1$, переводящее один трёхмерный репер в другой. Докажем единственность. Пусть f и $\widetilde{f}$ — преобразования $\mathbb{L}^2$(например), переводящие репер (P, e_1, e_2) в репер (P', e'_1, e'_2). Рассмотрим произвольную точку $A \in \mathbb{L}^2$ и её образы $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$. Покажем, что они совпадают. Проведём прямую (центральное сечение) AP. При изометрическом преобразовании сохраняются длины дуг, следовательно, прямая, как локально кратчайшая, перейдёт в прямую. Значит, образами отрезка центрального сечения AP при преобразованиях f и $\widetilde{f}$ будут также некоторые отрезки центральных сечений. Но при изометрии сохраняются и углы, а это значит, что углы между векторами e'_i и отрезками $f(AP)$ и $\widetilde{f}(AP)$ будут совпадать. Значит, направление образа дуги AP определено однозначно. Следовательно, и образ точки A определён однозначно, что и требовалось доказать. Доказательсто для $\mathbb{S}^2$ такое же. ■

Как и в случае $\mathbb{R}^2$, группы преобразований $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ трёхмерны, так как каждое преобразование можно представить матрицей 3×3, условие же ортогональности (или псевдоортогональности) даёт 6 соотношений на 9 членов матрицы, следовательно, остается 3 независимых параметра (в $\mathbb{R}^2$ это координаты начала образа репера и угол наклона).

Следствие 6.4. *Сфера $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ однородны: их локальное строение одинаково во всех точках (это не так для эллипсоидов, параболоидов, гиперболоидов (в обычной метрике)).*

Замечание. Имеет место следующее очевидное строгое включение: {ортогональные преобразования} $\subset$ $\subset$ {аффинные преобразования} $\subset$ {проективные преобразования}. В проективной группе содержится аффинная группа, а потому вместе с ней (через модель пополненной проетивной плоскости) группы движений $\mathbb{R}^2$ и плоскости Лобачевского, а также $SO(3) \subset O(3)$.

6.3. Модель Клейна плоскости Лобачевского

Рассмотрим плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ и обычную евклидову плоскость α, заданную уравнением $z = -1$. Рассмотрим центральную проекцию конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и $\mathbb{L}^2$ на плоскость α. Образ конуса при этом преобразовании (т. е. окружность на плоскости α) называется *абсолютом.* Вся плоскость Лобачевского, очевидно, при нашем преобразовании биективно отобразится на внутренность круга, границей которого является абсолют. Прямые на плоскости Лобачевского, т. е. центральные сечения гиперболоида, перейдут в хорды абсолюта. Вся эта конструкция и называется *моделью Клейна* геометрии Лобачевского. Заметим, что в этой модели хорошо видно, что через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести сколь угодно много прямых, не пересекающих данную, т.е. "параллельных"данной. Тем самым нарушается так называемый *пятый постулат* Евклида (аксиома параллельных). В этом и состоит отличие геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии.

Теперь вспомним, что проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ — это связка прямых, проходящих через начало координат.

Теорема 6.5. *Группа движений $\mathbb{L}^2$ совпадает с группой проективных преобразований связки (пополненной плоскости $z = -1$), которые сохраняют абсолют.*

☐ Каждое движение $\mathbb{L}^2$ как псевдоортогональное преобразование $\mathbb{R}^3_1$ оставляет на себе изотропный конус, следовательно, является проективным преобразованием RP^2, сохраняющим абсолют. Докажем обратное.

Рассмотрим проективное преобразование f, сохраняющее абсолют. Пусть оно задаётся матрицей C (определённой с точностью до пропорциональности). Основная идея доказательства в том, чтобы подправить пропорционально матрицу C так, чтобы она стала псевдоортогональной. Будем трактовать преобразование как замену координат (x', y', z') на (x, y, z). Тогда матрица $Q = E_1 = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ квадратичной формы уравнения конуса $(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0$ преобразуется по формуле C^tQC и переходит в матрицу λQ, так как точки (x, y, z) принадлежат тому же конусу, а два его уравнения пропорцианальны. Поскольку знак $\det Q$ — инвариант, то $\lambda > 0$. Теперь рассмотрим матрицу $\widetilde{C} := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C$. Имеем $Q = E_1$ и

$$E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right)^t E_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C\right) = \widetilde{C}^t E_1 \widetilde{C}, \tag{7}$$

что означает псевдоортогональность матрицы $\widetilde{C}$ (см. п. 5.2). Таким образом, установлена биекция между соответствующими группами преобразований. ■

Замечание. Определяющая RP^2 связка прямых (каждая из которых пересекает $\mathbb{S}^2$ в диаметрально противоположных точках) подсказывает ещё одну модель RP^2: это $\mathbb{S}^2$ после отождествления диаметрально противоположных точек (точки RP^2 - пары противоположных точек $\mathbb{S}^2$). Под планиметрией Римана понимают геометрию RP^2 в этой модели (с метрикой, локально изометричной $\mathbb{S}^2$). Заметим, что на RP^2 (в отличие от $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{L}^2$) нет параллельных прямых. Группа движений $\mathbb{RP}^2$ есть $SO(3)$ - подгруппа собственных движений $\mathbb{S}^2$.

6.4. Метрики на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ в полярных координатах

Рассмотрим $\mathbb{S}^2$ в сферических координатах, отмеряя угол θ от оси z. Имеем $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2$. Пусть $\rho = a$, тогда получаем $ds^2 = a^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + a^2 d\theta^2$. Пусть P — северный полюс сферы, A — произвольная точка на сфере, а l - длина дуги PA. Имеем

$$l = a\theta, \quad ds^2 = dl^2 + a^2 \sin^2 \frac{l}{a} d\varphi^2. \tag{8}$$

Если $l \to 0$, то $\sin\frac{l}{a} \sim \frac{l}{a}$ и $ds^2 \approx dl^2 + l^2 d\varphi^2$, т. е. метрика близка метрике в полярных координатах на плоскости. Пусть теперь $\rho = a = 1$, тогда $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Найдём длину s окружности на сфере с фиксированным углом $\theta = r$. Имеем

$$ds^2 = \sin^2 r d\varphi^2 \ \Rightarrow\ ds = \sin r d\varphi \ \Rightarrow\ s = \int\limits_0^{2\pi} \sin r d\varphi = 2\pi \sin r. \tag{9}$$

Площадь этой окружности будет равна

$$S = \iint \sqrt{|G|} d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sin\theta d\theta = 2\pi\left(1 - \cos r\right). \qquad (10)$$

Заметим, что если $r \to 0$, то $\cos r \sim 1 - \frac{r^2}{2}$, и $S \sim \pi r^2$, $sinr \sim r$, $s \sim 2\pi r$.

Теперь выведем метрику на $\mathbb{L}^2$. Пусть P — верхняя точка нижней полости гиперболоида, $A \in \mathbb{L}^2$, и θ — длина дуги PA. Параметризуем плоскость Лобачевского: $r = (\operatorname{sh}\theta\cos\varphi, \operatorname{sh}\theta\sin\varphi, -\operatorname{ch}\theta)$. Тогда

$$m_1 = \frac{\partial r}{\partial\theta} = \left(\operatorname{ch}\theta\cos\varphi, \operatorname{ch}\theta\sin\varphi, -\operatorname{sh}\theta\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial\varphi} = \left(-\operatorname{sh}\theta\sin\varphi, \operatorname{sh}\theta\cos\varphi, 0\right). \qquad (11)$$

Отсюда $g_{11} = (m_1, m_1) = 1,\ g_{12} = (m_1, m_2) = 0,\ g_{22} = (m_2, m_2) = \operatorname{sh}^2\theta$, и метрика имеет вид $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2$.

Аналогично случаю $\mathbb{S}^2$ получаем, что длина окружности радиуса $\theta = R$ равна $s = 2\pi\operatorname{sh}R$, а площадь круга того же радиуса равна

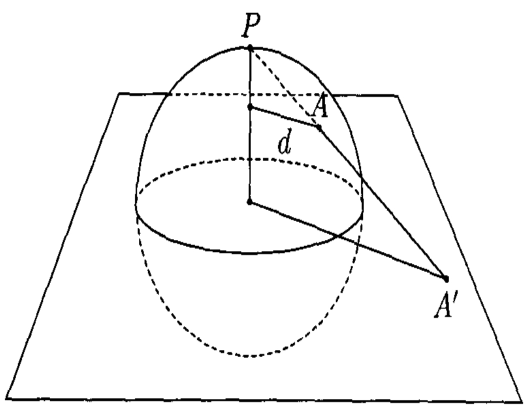
$$\iint \sqrt{|G|} d\varphi d\theta = \iint \operatorname{sh}\theta d\varphi d\theta = 2\pi(\operatorname{ch}R - 1). \qquad (12)$$

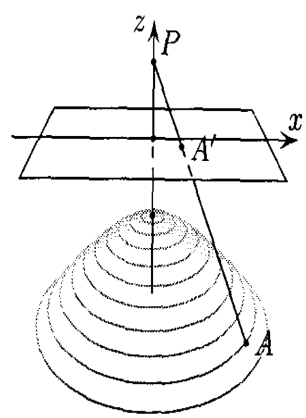
. И здесь при малых R имеем $s \sim 2\pi R$, $S \sim \pi R^2$.

6.5. Метрики $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ в координатах стереографической проекции

Возьмём точку $A(x, y, z)$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ или на плоскости Лобачевского $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ $(z < 0)$ и соединим её прямой с точкой $P(0, 0, 1)$. Если $A \neq P$, то эта прямая пересечёт плоскость xOy в некоторой точке $A'(x', y', 0)$. Очевидно, что такие отображения множеств $\mathbb{S}^2 \setminus \{P\}$ и L^2 на плоскость будут биективными. Пусть точка A' на плоскости имеет полярные координаты (ρ, φ), и d — расстояние от точки A до оси Oz. Имеем

$$\frac{\rho}{d} = \frac{1}{1 - z} \ \Rightarrow\ d = \rho(1 - z) \qquad (13)$$





$$\begin{array}{rl}
\text{Для } \mathbb{S}^2: & \text{Для } \mathbb{L}^2: \\
\rho^2(1-z)^2 = d^2 = 1 - z^2 & \rho^2(1-z)^2 = d^2 = z^2 - 1 \\
\rho^2(1-z) = 1 + z & \rho^2(1-z) = -(1+z) \\
z = \dfrac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} & z = \dfrac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} \\
\textit{в силу}\ (13)\ d = \dfrac{2\rho}{1 + \rho^2} & d = \dfrac{2\rho}{1 - \rho^2}
\end{array}$$

Отсюда получаем выражение координат точки на поверхности через полярные координаты проекции:

$$r_{\mathbb{S}}(\rho, \varphi) = \vec{OA} = \left(\frac{2\rho\cos\varphi}{1 + \rho^2}, \frac{2\rho\sin\varphi}{1 + \rho^2}, \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}\right) \qquad r_{\mathbb{L}}(\rho, \varphi) = \vec{OA} = \left(\frac{2\rho\cos\varphi}{1 - \rho^2}, \frac{2\rho\sin\varphi}{1 - \rho^2}, \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1}\right) \qquad (14)$$

Далее, для сферы имеем

$$m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \left(\frac{2\left(1-\rho^2\right)\cos\varphi}{\left(1+\rho^2\right)^2}, \frac{2\left(1-\rho^2\right)\sin\varphi}{\left(1+\rho^2\right)^2}, \frac{4\rho}{\left(1+\rho^2\right)^2}\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(-\frac{2\rho\sin\varphi}{1+\rho^2}, \frac{2\rho\cos\varphi}{1+\rho^2}, 0\right). \tag{15}$$

Следовательно,

$$G_{\mathbb{S}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

и метрика сферы имеет вид

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1+\rho^2\right)^2} \underbrace{\left(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2\right)}_{\text{метрика плоскости}} = \frac{4}{\left(1+x'^2+y'^2\right)^2}\left(dx'^2 + dy'^2\right). \tag{17}$$

Теперь посмотрим, что будет на $\mathbb{L}^2$. Имеем

$$m_1 = \frac{\partial r}{\partial \rho} = \left(\frac{2\left(1+\rho^2\right)\cos\varphi}{\left(1-\rho^2\right)^2}, \frac{2\left(1+\rho^2\right)\sin\varphi}{\left(1-\rho^2\right)^2}, -\frac{4\rho}{\left(1-\rho^2\right)^2}\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(-\frac{2\rho\sin\varphi}{1-\rho^2}, \frac{2\rho\cos\varphi}{1-\rho^2}, 0\right). \tag{18}$$

Значит,

$$G_{\mathbb{L}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-\rho^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

и таким образом, метрика плоскости Лобачевского имеет вид

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1-\rho^2\right)^2} \underbrace{\left(d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2\right)}_{\text{метрика плоскости}} = \frac{4}{\left(1-x'^2-y'^2\right)^2}\left(dx'^2 + dy'^2\right). \tag{20}$$

6.6. Метрика поверхности вращения. Реализация участка $\mathbb{L}^2$ в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим кривую $r(\theta) = (l(\theta), 0, z(\theta))$, и пусть θ — натуральный параметр, т. е. $(l'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = 1$. Пусть φ — полярный угол, тогда уравнение поверхности вращения этой кривой вокруг оси Oz принимает вид

$$r(\theta, \varphi) = \big(l(\theta)\cos\varphi, l(\theta)\sin\varphi, z(\theta)\big). \tag{21}$$

Тогда

$$m_1 = \frac{\partial r}{\partial \theta} = \left(l'\cos\varphi, l'\sin\varphi, z'\right), \quad m_2 = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \left(-l\sin\varphi, l\cos\varphi, 0\right). \tag{22}$$

Так как θ — натуральный параметр, то $|m_1|^2 = l'^2 + z'^2 = 1$, и метрика на поверхности вращения имеет вид

$$ds^2 = d\theta^2 + l^2(\theta)d\varphi^2, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2(\theta) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Теорема 6.6. *Главными направлениями на поверхности вращения являются параллели и меридианы.*

□ В самом деле, если бы главное направление было другим, то главным было бы, очевидно, и симметричное относительно меридиана (в силу совпадения их нормальных кривизн), а точка бы оказалась сферической (см. п. 3.4).

■

Теперь найдём главные кривизны поверхности вращения. Для меридиана имеем

$$\varepsilon_1 = m_1 = \left(l', 0, \sqrt{1-(l')^2}\right), \quad \varepsilon_1' = k\varepsilon_2 = l''\left(1, 0, -\frac{l'}{\sqrt{1-(l')^2}}\right) \Rightarrow |\lambda_1| = \frac{|l''|}{\sqrt{1-(l')^2}}. \tag{24}$$

Остаётся найти λ_2. Кривизна сечения по параллели равна $\frac{1}{l(\theta)}$ (обратная величина к радиусу), а тогда по теореме Менье кривизна нормального сечения равна $\lambda_2 = \frac{\cos\alpha}{l}$, где α — угол между вектором нормали $\vec{n}$ и осью Ox. Имеем

$$\vec{n} = \left(\sqrt{1-(l')^2}, 0, -l'\right), \quad \cos\alpha = \sqrt{1-(l')^2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{1-(l')^2}}{l}. \tag{25}$$

Отсюда гауссова кривизна поверхности вращения при натуральной параметризации меридиана равна

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \pm \frac{l''(\theta)}{l(\theta)}. \tag{26}$$

Выясним, можно ли представить плоскость Лобачевского как поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$. Метрика на $\mathbb{L}^2$ имеет вид $ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2$. Хотелось бы взять функцию $l(\theta) = \operatorname{sh}\theta$ с натуральной параметризацией. Тогда имеем $\operatorname{ch}^2\theta + z'^2 = 1$. Но так как $\operatorname{ch}^2\theta = 1 + \operatorname{sh}^2\theta \geqslant 1$, то получаем противоречие. Значит, этого сделать нельзя (хотя $\mathbb{L}^2$ и является поверхностью вращения в $\mathbb{R}^3_1$).

Теперь сделаем замену $\varphi = \mu\psi$, где $\mu < 1$. Тогда $ds^2 = d\theta^2 + \mu^2 \operatorname{sh}^2\theta d\psi^2$. Положим $l(\theta) = \mu sh\theta$. Тогда

$$l'_\theta = x'_\theta = \mu \operatorname{ch}\theta, \quad z'_\theta = \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{ch}^2\theta}, \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z'_\theta}{x'_\theta} = \sqrt{\frac{1}{\mu^2 \operatorname{ch}^2\theta} - 1}. \tag{27}$$

Если мы будем вращать такую кривую вокруг оси Oz, то получим поверхность в $\mathbb{R}^3$, локально изометричную плоскости Лобачевского. В силу (26) для этой повреxности $K = -1$.

6.7. Конформно-евклидовы метрики. Сумма углов геодезического треугольника на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$

Определение. Метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dy^j$ называется *конформно-евклидовой*, если существуют криволинейные координаты, в которых $ds^2 = f(M)\left(\sum \left(dx^i\right)^2\right)$, где $f(M)$ — функция, зависящая от точки, т. е. $G = f(M)E$ в некоторых координатах. Такие координаты конформно-евклидовой метрики называются *конформными (изотермическими)*.

Например, метрики на $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ конформно евклидовы. Вообще, можно доказать, что метрика на поверхности в $\mathbb{R}^3$ конформно евклидова.

Теорема 6.7. *В конформных координатах углы на карте равны углам в римановой метрике.*

□ Имеем $\cos\varphi = \frac{(dr, d\widetilde{r})}{|dr|\cdot|d\widetilde{r}|}$. В силу конформности

$$\cos\varphi = \frac{f(M)\left(dx^1 d\widetilde{x}^1 + \ldots + dx^n d\widetilde{x}^n\right)}{\sqrt{f(M)\sum(dx^i)^2}\sqrt{f(M)\sum(d\widetilde{x}^i)^2}} = \frac{\left(dx^1 d\widetilde{x}^1 + \ldots + dx^n d\widetilde{x}^n\right)}{\sqrt{\sum(dx^i)^2}\sqrt{\sum(d\widetilde{x}^i)^2}}. \tag{28}$$

Правая часть последнего равенства есть в точности выражение для угла между векторами на карте. ■

Теорема 6.8. *Сумма углов треугольника на сфере больше π, а на плоскости Лобачевского - меньше π.*

□ Сначала докажем утверждение для случая $\mathbb{S}^2$. Без ограничения общности можно считать, что вершина A треугольника ABC совпадает с южным полюсом. Рассмотрим стереографическую проекцию этого треугольника на плоскость xOy, получим треугольник $A'B'C'$, причём $A \mapsto A'(0,0,0)$. При стереографической проекции прямые, проходящие через южный полюс, перейдут в прямые на плоскости. Значит, образы отрезков AB и AC будут отрезками на плоскости. Хорда сферы BC перейдёт в отрезок $B'C'$, а образ «сферического» отрезка BC будет лежать вне треугольника $A'B'C'$ (это очевидным образом следует из того, что хорда лежит ближе к центру окружности, чем дуга центрального сечения). Как было показано в п. 6.5, стереографическая проекция определяет конфорнмно-евклидову форму метрики $\mathbb{S}^2$ на карте $\mathbb{R}^2$, и по предыдущей теореме углы при таком проектировании сохраняются. Значит, неравенство $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ справедливо (заметим, что проекция "сферического отрезка"AB - часть кривой второго порядка с отрезком $A'B'$ в качестве хорды).

Теперь рассмотрим $\mathbb{L}^2$. Здесь рассуждения аналогичны, а треугольник надо брать такой, чтобы у него одна вершина совпадала с вершиной гиперболоида, т. е. точкой $(0,0,-1)$. Тогда одна из сторон треугольника перейдёт внутрь треугольника, образованного стереографическими проекциями вершин.

Что касается точной оценки суммы углов, то она будет представлена позже. ■

6.8. Конформно эквивалентные метрики

Определение. Пусть даны две области Θ и $\widetilde{\Theta}$ с метриками G и $\widetilde{G}$ соответственно. Если существует диффеоморфизм $f\colon \Theta \to \widetilde{\Theta}$, сохраняющий углы, то он называется *конформным преобразованием* области Θ в $\widetilde{\Theta}$. Метрики G и $\widetilde{G}$ называются *конформно эквивалентными*, если существует конформное преобразование Θ в $\widetilde{\Theta}$.

Лемма 6.9. *Пусть $f\colon V \to \widetilde{V}$ — линейное отображение n-мерных евклидовых пространств. Тогда следующие утверждения эквивалентны для любых векторов $a, b \in V$, $\widetilde{a} = f(a)$, $\widetilde{b} = f(b)$.*

1. $\cos\angle(a,b) = \cos\angle(\widetilde{a},\widetilde{b})$;

2. $(\widetilde{a},\widetilde{b}) = \lambda^2(a,b)$, *где* λ *- некоторая константа;*

3. $|\widetilde{a}| = \lambda|a|$,

□ $\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Возьмем $e_1,\dots,e_n$ — ортонормированный базис. При отображении f он перейдёт в ортогональный базис, так как углы сохраняются. Покажем, что длины векторов изменяются в одинаковое число раз. Пусть, например, $|f(e_1)| \neq |f(e_2)|$. Тогда, очевидно, получим $\cos 45^\circ = \cos\angle(e_1, e_1+e_2) \neq \cos\angle(f(e_1), f(e_1+e_2))$ и придём к противоречию.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ Выразим скалярное произведение через длины векторов:

$$(a,b) = \frac{1}{2}\big[(a+b,a+b)-(a,a)-(b,b)\big], \quad (\widetilde{a},\widetilde{b}) = \frac{1}{2}\big[(\widetilde{a}+\widetilde{b},\widetilde{a}+\widetilde{b})-(\widetilde{a},\widetilde{a})-(\widetilde{b},\widetilde{b})\big]. \tag{29}$$

Следовательно, $(\widetilde{a},\widetilde{b}) = \lambda^2(a,b)$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Очевидно. ■

Теорема 6.10. *Метрики областей* Θ *и* $\widetilde{\Theta}$ *конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют координаты* $(x^1,\dots,x^n)$ *в* Θ *и* $(\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n)$ *в* $\widetilde{\Theta}$ *такие, что* $d\widetilde{s}^2 = F(A)ds^2$, *где* $F(A)$ *- некоторая строго положительная функция точек* $A \in \Theta$.

□ Пусть задано $f: \Theta \to \widetilde{\Theta}$, определяемое формулами $y^i = y^i(x^1,\dots,x^n)$, с матрицей Якоби $\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x^j}\right\}$. Рассмотрим кривую $\gamma(t) = \big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$ в области Θ и её образ $\widetilde{\gamma} = \big(y^1(x^1(t),\dots,x^n(t)),\dots,y^n(x^1(t),\dots,x^n(t))\big)$.

Имеем

$$\dot{y}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^1}\dot{x}^1 + \ldots + \frac{\partial y^i}{\partial x^n}\dot{x}^n, \tag{30}$$

следовательно, касательный вектор преобразуется следующим образом:

$$\big(\dot{y}^1,\dots,\dot{y}^n\big)^t = J(\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)^t. \tag{31}$$

Отображение касательных пространств линейно в каждой точке $A \in \Theta$, а значит, можно применять доказанную выше лемму. Пусть f - конформное преобразование $f\colon \Theta \to \widetilde{\Theta}$, тогда оно сохраняет углы. Тогда по лемме в соответствующих друг другу посредством f координатах $\widetilde{G} = F(A)G$. Наоборот, если для каких-то криволинейных координат x^i в Θ и $\tilde{x}^i$ в $\tilde{\Theta}$, $i = 1,...,n$ выполнено это соотношение, рассмотрим отображение $f\colon \Theta \to \widetilde{\Theta}$, при котором $(x^1,\dots,x^n) \mapsto (\widetilde{x}^1,\dots,\widetilde{x}^n)$. Метрики отличаются на множитель, а значит, все углы сохраняются. Тем самым теорема доказана в обе стороны. ■

Легко показать, что конформность f означает, что преобразования (31) - гомотетии с коэффициентами $\sqrt{F(A)}$.

7. Внутренннее дифференцирование векторных полей на поверхностях

7.1. Производная от функции по вектору

Определение. Функция $f\colon \Theta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке a, если существует дифференциал, т.е. линейная функция $df(x-a)$ на пространстве векторов $\{x-a\}$ такая, что $f(x) = f(a) + df(x-a) + o(|x-a|)$. Функция f называется *гладкой*, если существуют её частные производные и они непрерывны. Гладкие функции дифференцируемы.

Определим понятие *производной функции* $f = f(x^1,...,x^n)$ *по вектору* $w = (Y^1,...,Y^n)$ в точке A следующим образом: возьмем кривую $r(t) = r\big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$, проходящую через точку A и такую, что $\dot{r}(A) = (\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n) = w$, и положим по определению

$$\frac{df}{dw} := \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i = (\operatorname{grad} f, w) = \frac{\partial f}{\partial x^i}Y^i. \tag{1}$$

В случае $|w| = 1$ это производная от f по направлению w. Корректность очевидна, так как значение производной зависит только от функции и самого вектора (не зависит от выбора кривой).

Определение. Пусть в каждой точке области Θ задан вектор w. В этом случае говорят, что в области задано *векторное поле.* Производная $\frac{df}{dw}$ теперь - функция точек $A \in \Theta$.

Рассмотрим теперь функцию $f\colon M^k \to \mathbb{R}$, где M^k — некоторая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда можно определить производную функции f по касательному вектору w к M^k. Определение будет таким же, а именно.

Координаты $(x^1,\dots,x^k)$ на поверхности можно локально продолжить до координат $(x^1,\dots,x^k,x^{k+1},\dots,x^n)$ в области пространства (теорема 4.6). В таких координатах области поверхность задается уравнениями $x^i = 0$,

$i = k+1, \dots, n$. Функцию f тоже можно продолжить: $f(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^k)$, получится гладкая функция в области. Тогда касательный вектор w имеет координаты $(Y^1, \dots, Y^k, 0, \dots, 0)$, следовательно, $\frac{df}{dw} = \frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i$, где $i = 1 \dots k$, так как остальные координаты нулевые. Следовательно, производная по вектору w не зависит от способа продолжения координат на область.

7.2. Дифференцирование векторных полей

Определение. Пусть в области $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле v и в отдельной точке $A_0 \in \Theta$ фиксирован вектор $w = (Y^1, ..., Y^n)$. *Производная* $\nabla_w v := \frac{dv}{dw}$ *векторного поля* v *по вектору* w *в точке* A_0 определяется покоординатно. В аффинных координатах $v = (X^1, \dots, X^n)$, где $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$ - это обычные функции, поэтому $\frac{dv}{dw} = (\frac{dX^1}{dw}, ..., \frac{dX^n}{dw})$, и в соответсвии с п. 7.1 $\frac{dX^k}{dw} = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} Y^i$.

Более подробно, рассмотрим проходящую через A_0 кривую $r(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$ с касательным вектором $\big(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\big) = (Y^1, ..., Y^n)$ в точке A_0. Подставим $r(t)$ в уравнения поля, т. е. рассмотрим сложную вектор-функцию $\big(X^1(r(t)), \dots, X^n(r(t))\big) =: v(t)$. Тогда по определению

$$\nabla_w v = v'_t = ((X^1)'_t, ..., (X^n)'_t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(v(t + \Delta t) - v(t)). \tag{2}$$

Заметим, что $\nabla_w v$ - вектор в точке A. Более важное замечание: координаты $\nabla_w v$ имеют такое описание только в аффиной системе координат - при переносе $v(t+\Delta t)$ в точку $r(t)$ координаты этого вектора не изменятся в аффиной системе.

Через $(\nabla_w v)^k$ будем обозначать k-ю координату производной. Имеем

$$(\nabla_w v) = (\frac{dX^1}{dw}, ..., \frac{dX^n}{dw}), (\nabla_w v)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \dot{x}^i = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} Y^i, w = (Y^1, ..., Y^n) \tag{3}$$

т. е. $\nabla_w v$ есть произведение матрицы $\left\{ \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right\}$ на вектор w. Определение ∇ не зависит от выбора кривой, так как каждая координата ∇ зависит только от вектора w и координат поля.

Можно определить *производную поля* v *по полю* w — производная будет не отдельным вектором, а векторным полем.

Лемма 7.1. $f = \text{const} \Leftrightarrow df = 0$, *т. е. все частные производные равны* 0.

$\square$ Слева направо — очевидно. Наоборот: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow$ функция f не зависит от x_i для $\forall\, i \Rightarrow f = \text{const}$. $\blacksquare$

Определение. Векторное поле v называется параллельным, если все его векторы параллельны, сонаправлены и одинаковы по длине.

Теорема 7.2. *Векторное поле* $v = (X^1, \dots, X^n)$ *параллельно* $\Leftrightarrow$ $\nabla_w v = 0$ *для всех векторов* w *в точках области.*

$\square$ Слева направо утверждение очевидно. Обратно: пусть $\nabla_w v = 0$. Тогда, в частности, $\nabla_{e_i} v = 0$. Значит, $(\nabla_{e_i} v)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} = 0$. Следовательно, функции X^k не зависят от x^i для $\forall\, i$, а значит, они постоянны и все векторы поля постоянны. $\blacksquare$

Рассмотрим частный случай векторного поля v на кривой $r(t)$, $v = (X^1(t), ..., X^n(t))$. Введём операцию $\frac{Dv}{dt}$ как $\frac{Dv}{dt} := (\dot{X}^1, ..., \dot{X}^n)$, см. (2). Векторное поле v и координату $t = x^1$ можно локально продолжить до координат $x^1, x^2, ..., x^n$ в области $\mathbb{R}^n$, тогда окажется (см. п. 7.1), что $\frac{Dv}{dt} = \nabla_{\dot{r}} v$, ибо ввиду (3) $(\nabla_{\dot{r}} v)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dX^k}{dt}$. Вывод: $\frac{D}{dt}$ - частный случай $\nabla_w v$.

7.3. Свойства операторов ∇ и $\frac{D}{dt}$ в аффинном пространстве

0° Если v и w — гладкие векторные поля, то $\nabla_w v$ - тоже гладкое поле, см. (3).

1° Линейность по v: $\nabla_w(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \nabla_w v_1 + \mu \nabla_w v_2$ для $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\square$ Непосредственно следует из линейности операции дифференцирования по v, см. (3). $\blacksquare$

2° Формула Ньютона–Лейбница: $\nabla_w(fv) = \frac{df}{dw} v + f \nabla_w v$, где $f(x^1, \dots, x^n)$ — гладкая функция.

$\square$ Пусть поле w имеет координаты $(Y^1, \dots, Y^n)$. Имеем $fv = (fX^1, \dots, fX^n)$. Тогда

$$(\nabla_w v)^k = \frac{\partial f X^k}{\partial x^i} Y^i = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i}_{\frac{df}{dw}} X^k + f \underbrace{\frac{\partial X^k}{\partial x^i} Y^i}_{(\nabla_w v)^k} = \frac{df}{dw} X^k + f (\nabla_w v)^k. \tag{4}$$

$\blacksquare$

3° Функциональная линейность по w: $\nabla_{fw_1 + gw_2} v = f \nabla_{w_1} v + g \nabla_{w_2} v$.

□ Умножение матрицы на вектор есть линейная операция, см. (3). ■

Теперь сформулируем свойства операции $\frac{D}{dt}$:

0° Если v — гладкое векторное поле, то $\frac{Dv}{dt}$ — гладкая функция по t, см. (2).

1° Линейность:

$$\frac{D(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)}{dt} = \lambda_1 \frac{D(v_1)}{dt} + \lambda_2 \frac{D(v_2)}{dt}. \tag{5}$$

2° Формула Ньютона – Лейбница:

$$\frac{D(fv)}{dt} = \frac{df}{dt} v + f \frac{Dv}{dt} (\textit{следствие}(4)). \tag{6}$$

Свойство **3**° операции ∇ для операции $\frac{D}{dt}$ не определено.

7.4. Оператор ∇ на геометрическом многообразии (ковариантное дифференцирование)

Рассмотрим поверхность M^n в пространстве $\mathbb{R}^m_q$ и её касательное пространство TM в точке p. Предполагаем, что в случае псевдо-евклидова пространства на M^n индуцируется риманова положительно определённая метрика. Пусть v — поле касательных векторов к поверхности, а w — некоторый касательный вектор. В $\mathbb{R}^m_q$ определён оператор $\nabla_w v$. Поскольку операция $\nabla_w v$ действует на v покоординатно, это следует из аргументов, приведённых в конце п. 7.1. В общем случае вектор $\nabla_w v$ не касается поверхности M^n (например, на сфере). Определим другую операцию дифференцирования в пределах касательных пространств. Тот оператор, который мы определили выше, будем обозначать через $\nabla^0_w v$, а новую операцию определим так:

$$\nabla_w v := \mathrm{Pr}_{TM}\, \nabla^0_w v, \tag{7}$$

где Pr_{TM} есть ортогональная проекция на касательное пространство TM.

Аналогичным образом для касательного векторного поля вдоль кривой $r(t) \subset M$ определяется $\frac{Dv}{dt}$.

Перечислим свойства новой операции $\nabla_w v$. Легко видеть, что имеют место свойства **0**°- **3**°, и доказательства их практически такие же (см. п. 7.3).

0° Пусть v и w - гладкие поля. Тогда $\nabla_w v$ тоже гладкое.

□ Ортогонализуем базис в TM. Заметим, что это гладкий процесс (по отношению к координатам p). Поскольку касательные пространства не изотропны, то $\mathbb{R}^m = TM \oplus TM^{\perp}$ в точках M^n. Проекция — гладкая операция, а значит, и поле $\nabla_w v$ будет гладким. ■

1° Линейность: проекция линейна, поэтому это свойство выполняется.

2° Формула Ньютона – Лейбница: из линейности проекции с учётом $Pr_{TM} v = v$.

3° Из линейности проекции

Покажем, что ∇ является внутренней операцией, что она выражается через метрический тензор G на M^n.

7.5. Символы Кристоффеля и их свойства

Пусть поверхность M^n в $\mathbb{R}^m_q$ задана параметрически уравнением $r = r(x^1, \ldots, x^n)$, $y^i = y^i(x^1, ..., x^n)$, где $y^1, \ldots, y^m$ — аффинные координаты в пространстве. Рассмотрим касательные поля $v(X^1, \ldots, X^n)$ и $w(Y^1, \ldots, Y^n)$ на M, где $X^i = X^i(x^1, \ldots, x^n)$ и $Y^i = Y^i(x^1, \ldots, x^n)$ - координаты в базисе $m_1, ..., m_n \in TM$, $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$. Займёмся вычислением координат $\nabla_w v$, пользуясь свойтсвами **0**°- **3**°:

$$\nabla_w v = \nabla_{Y^j m_j} v = \left(\nabla_{m_j}(X^i m_i)\right) Y^j = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} m_i + X^i \nabla_{m_j} m_i\right) Y^j. \tag{8}$$

Введём некоторые обозначения. Выражения $\Gamma^k_{ij} := (\nabla_{m_j} m_i)^k$ называются *символами Кристоффеля.*

Поменяв индекс суммирования i в части формулы (8) на k, преобразуем её к виду

$$\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} m_k + \Gamma^k_{ij} m_k X^i\right) Y^j = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i\right) Y^j m_k. \tag{9}$$

Окончательно получаем

$$(\nabla_w v)^k = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i\right) Y^j. \tag{10}$$

Таким образом, на n-поверхности в пространстве имеется n^3 символов Кристоффеля.

Теперь рассмотрим кривую $r = \left(x^1(t), \dots, x^n(t)\right) \subset M^n$. Тогда $Y^i = \dot{x}^i$, и для $\frac{D}{dt}$, поскольку $\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\dot{x}^j = \frac{dX^k}{dt}$, в криволинейных координатах поверхности получаем выражение

$$\left(\frac{Dv}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^j \dot{x}_i. \tag{11}$$

Замечание. Эти и последующие выводы справедливы и для обычного дифференцирования $\nabla^0_w v$ в $\mathbb{R}^m_q$, рассматриваемого в любых криволинейных координатах $x^1, ..., x^m$ в области $\mathbb{R}^m_q$ (индексы i, j будут изменяться от 1 до m).

Теорема 7.3. *Координаты в области $\mathbb{R}^m$ являются аффинными тогда и только тогда, когда $\Gamma^k_{ij} = 0$.*

□ Если координаты аффинные, то очевидно, что все символы Кристоффеля нулевые. Наоборот, пусть $\Gamma^k_{ij} = 0$, то есть $\nabla_{m_i} m_j = 0$. Пусть $w = Y^j m_j$, тогда $\nabla_w m_i = 0$ в силу свойства функциональной линейности. Но по теореме (7.2) векторы m_i постоянны. Так как $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$, то r - линейная функция от $x^1, ..., x^m$, $r = (y^1, ..., y^m)$, $y^i = a^i_j x^j + b^i$. Следовательно, система координат - аффинная. ■

Теорема 7.4. *Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.*

□ Рассмотрим поверхность $r = (y^1, \dots, y^m) \subset \mathbb{R}^m$, где $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, а x^i — криволинейные координаты. Надо доказать, что $\nabla_{m_i} m_j = \nabla_{m_j} m_i$. Для этого достаточно доказать, что $\nabla^0_{m_j} m_i = \nabla^0_{m_i} m_j$ (в продолженных координатах). Имеем $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$. Тогда

$$\frac{\partial m_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = \left(\frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^j}, \dots, \frac{\partial^2 y^m}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \frac{\partial m_j}{\partial x^i}. \tag{12}$$

Поскольку все функции гладкие, то от порядка дифференцирования ничего не зависит. ■

7.6. Тождества Кристоффеля

Лемма 7.5. *Пусть есть три векторных поля v_1, v_2, w на геометрическом многообразии M в $\mathbb{R}^m$, тогда*

$$\frac{d(v_1, v_2)}{dw} = (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2). \tag{13}$$

□ Для $\nabla^0_w v$ это свойство можно проверить напрямую: пусть $v_1 = (X^1_1, \dots, X^m_1)$, $v_2 = (X^1_2, \dots, X^m_2)$, $w = (Y^1, \dots, Y^m)$. Имеем: $(v_1, v_2) = X^1_1 X^1_2 + ... + X^m_1 X^m_2$, поэтому (см. (3)) $\frac{d(v_1,v_2)}{dw} = \sum_i (X^i_1 (\frac{\partial X^i_2}{\partial x^j} Y^j) + (Y^j \frac{\partial X^i_1}{\partial x^j}) X^i_2) = \left(\nabla^0_w v_1, v_2\right) + \left(v_1, \nabla^0_w v_2\right)$. Далее имеем: $\nabla^0_w v_1 = \nabla_w v_1 + v'_1$, $\nabla^0_w v_2 = \nabla_w v_2 + v'_2$ (векторы v'_1 и v'_2 лежат в ортогональном дополнении к касательному пространству). Тогда $(v'_1, v_2) = (v_1, v'_2) = 0$, так как v_1, v_2 — касательные, следовательно, $\frac{d(v_1,v_2)}{dw} = (\nabla_w v_1, v_2) + (v_1, \nabla_w v_2)$. ■

Следствие 7.6. *Пусть есть 2 векторных поля $v(t)$, $w(t)$ на кривой $r = r(t) \subset M \subset \mathbb{R}^m$, тогда, так как D - частный случай ∇ (см. (11)),*

$$\frac{d(v, w)}{dt} = \left(\frac{Dv}{dt}, w\right) + \left(v, \frac{Dw}{dt}\right). \tag{14}$$

Выведем явные формулы для Γ^k_{ij}. Воспользуемся только что доказанной леммой, применив её к векторам m_i и m_j. Имеем $(m_i, m_j) = g_{ij}$, тогда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = (\nabla_{m_k} m_i, m_j) + (m_i, \nabla_{m_k} m_j). \tag{15}$$

Так как $\nabla_{m_k} m_i = \Gamma^\alpha_{ik} m_\alpha$, то

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^\alpha_{ik} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i}. \tag{16}$$

Полученное равенство можно записать для любого набора индексов i, j, k. Поэтому можно написать систему уравнений, получающихся путём циклической перестановки индексов:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \Gamma^\alpha_{ki} g_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{jk} g_{i\alpha}, \\
\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \Gamma^\alpha_{ij} g_{\alpha k} + \Gamma^\alpha_{ki} g_{j\alpha}, \\
\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= \Gamma^\alpha_{jk} g_{\alpha i} + \Gamma^\alpha_{ij} g_{k\alpha}.
\end{aligned}$$

Из этой системы (пользуясь симметриями компонент G и Γ) получаем *первое тождество Кристоффеля* (суммирование идёт по индексу α):

$$\Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{17}$$

Пусть $G^{-1} = \left\{g^{\alpha\beta}\right\}$. Умножив каждое равенство Кристоффеля на $g^{k\beta}$ и просуммировав по k, получим $\Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} g^{k\beta}$ (суммирование по k и α). Поскольку $g_{\alpha k} g^{k\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta; \\ 1, & \alpha = \beta, \end{cases}$ то

$$\Gamma_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{k\alpha}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{18}$$

Это *второе тождество Кристоффеля* (суммирование по k).

Вывод. Из тождеств Кристоффеля следует, что символы Кристоффеля зависят только от метрики, то есть дифференцирование есть внутренняя операция (зависит только от G, но не от способа вложения $M^n \subset \mathbb{R}^m_q$).

Замечание. Используя символы Кристофеля, операцию $\nabla_w v$ можно определить и для абстрактных многообразий с римановой метрикой.

7.7. Геодезическая кривизна

Пусть нам задано многообразие $M^n \subset \mathbb{R}^m$ с локальной параметризацией $r = r\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ и локальным базисом $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$, и кривая $r(t) = \left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right)$ на M^n. Пусть s - натуральный параметр для кривой, т. е. $ds = |v| dt$, и $\frac{dr}{ds} = \varepsilon_1$ — касательный вектор длины 1. Обычная кривизна в евклидовом пространстве задается формулой: $k\varepsilon_2^0 = \frac{D^0 \varepsilon_1}{ds}$. (Здесь D^0, как и ∇^0 - дифференцирование в объемлющем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$).

Определение. Пусть $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = k_g \varepsilon_2$. Величина k_g называется *геодезической кривизной* и представляет собой кривизну линии внутри изучаемой поверхности (если $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = 0$, то считаем, что $k_g := 0$, а вектор ε_2 не определён).

Лемма 7.7. *Если $k_g \neq 0$, то $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$ в TM.*

$\square$ Имеем $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 1$. Продифференцировав, получим $0 = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}{ds} = 2\left(\frac{D\varepsilon_1}{ds}, \varepsilon_1\right) = 2k_g(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$. Но так как $k_g \neq 0$, то $(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$. ■

Лемма 7.8. $k_g \varepsilon_2 = \mathrm{Pr}_{TM}\, k\varepsilon_2^0$.

$\square$ В самом деле, $k_g \varepsilon_2 = \frac{D\varepsilon_1}{ds} = \mathrm{Pr}_{TM} \frac{D^0 \varepsilon_1}{ds} = \mathrm{Pr}_{TM}(k\varepsilon_2^0)$. ■

7.8. Геодезические линии

Определим понятие кривых, являющихся аналогами прямых линий в $\mathbb{R}^m$ как линий, для которых $k = 0$.

Определение. Кривая $r = r(t)$ на поверхности называется *геодезической*, если $k_g = 0$, то есть $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = 0$.

Замечание. Если для геодезической взять параметр $t = \lambda s$, то $\dot{r} = v = \mu\varepsilon_1$, а значит, $\frac{Dv}{dt} = \frac{D(\mu\varepsilon_1)}{\lambda ds} = 0$. Следовательно, для определения геодезической годится любой параметр, пропорциональный натуральному.

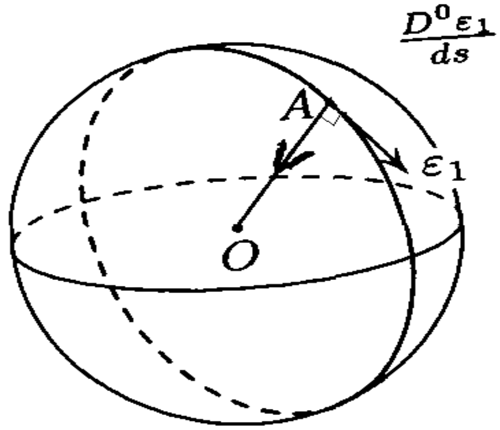
Лемма 7.9. *Пусть дана кривая $r = r(t)$, $v = \dot{r}$, и $\frac{Dv}{dt} = 0$. Тогда она будет геодезической и параметр t пропорционален натуральному.*

$\square$ Покажем, что $|v| = \mathrm{const}$. В самом деле, $\frac{D(v,v)}{dt} = \left(\frac{Dv}{dt}, v\right) + \left(v, \frac{Dv}{dt}\right) = 0 \;\Rightarrow\; |v| = \mathrm{const}$. Следовательно, $v = \mu\varepsilon_1$, и по теореме (2.3) имеем $t = \lambda s$. Отсюда $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = \frac{D(\frac{1}{\mu}v)}{d(\frac{t}{\lambda})} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{Dv}{dt} = 0$. Значит, кривая геодезическая. ■

В своё время мы объявили "прямыми"на сфере и плоскости Лобачевского центральные сечения этих поверхностей плоскостями. Покажем теперь, что они действительно «прямые» в геодезическом смысле.

Теорема 7.10. *На $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{L}^2$ геодезическими являются плоские центральные сечения.*

$\square$ Параметризуем кривую $r(s)$ сечения $\mathbb{S}^2$ или $\mathbb{L}^2$ натуральным параметром. Её касательный вектор ε_1, очевидно, лежит в секущей плоскости и в касательной плоскости к поверхности. Пусть $\vec{OA}$ — радиус-вектор точки на кривой. Он ортогонален касательной плоскости. Так как $\frac{D^0\varepsilon_1}{ds}$ лежит в сеущей плоскости и ортогонален ε_1, то $\frac{D^0\varepsilon_1}{ds} \parallel \overline{OA}$. Следовательно, вектор $\frac{D^0\varepsilon_1}{ds}$ ортогонален к касательной плоскости, и $\frac{D\varepsilon_1}{ds} = \mathrm{Pr}_{TM} \frac{D^0\varepsilon_1}{ds} = 0$. Следовательно, центральные сечения являются геодезическими. Ниже мы докажем, что других геодезических нет. ■



Определение. Рассмотрим поверхность M^n, кривую $r(t)$ на M^n и поле $v(t)$ касательных векторов к M^n на кривой. Будем говорить, что *поле параллельно вдоль кривой*, если $\frac{Dv}{dt} = 0$.

Используя это определение, можно сказать, что кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ поле $\varepsilon_1(s)$ параллельно вдоль этой кривой.

7.9. Дифференциальные уравнения для геодезических

Как мы знаем, k-я координата в базисе $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}, i = 1, ..., n$, производной вектора $v = (X^1, \dots, X^n)$ вдоль кривой $r(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$, расположенной на $M^n \subset \mathbb{R}^m_q$, равна $\left(\frac{Dv}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}^j$. Векторное поле $v(t)$ параллельно вдоль кривой $\Leftrightarrow$ $\left(\frac{Dv}{dt}\right)^k = 0$. Получаем систему уравнений для такого $v(t)$:

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}^j = 0, \ k = 1, ..., n. \tag{19}$$

В нашем случае $v(t) = \dot{r} = \big(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n\big)$, и окончательно система имеет вид

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \ k = 1, ..., n. \tag{20}$$

Очевидно, что кривая является геодезической $\Leftrightarrow$ она удовлетворяет этим уравнениям.

Применим теорему существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями, т. е. точкой x_0 на поверхности и направлением v_0. Таким образом, в окрестности любой точки в заданном направлении выходит одна и только одна геодезическая. Отметим также, что решение нашей системы гладко зависит от начальных условий.

Теперь теорему о «прямых» на сфере и плоскости Лобачевского можно усилить утверждением о том, что других геодезических, кроме центральных сечений, там не бывает (поскольку центральные сечения имеются по всем направлениям в точке).

7.10. Геодезическая через две точки.

Как и выше, M^n - подмногообразие (n-поверхность) евклидова пространства R^m, $x^1, ..., x^n$ - криволинейные координаты на карте M^n, $r = r(x^1, ..., x^n)$. Координаты $(z^1, ..., z^n)$ касательных векторов в точке $A_0 \in M^n$ рассматриваются в локальном базисе $m_1, ..., m_n$, $m_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$.

Теорема 7.11. *В достаточно малой окрестности точки $A_0 = (x^1_0, ..., x^n_0)$ любые две точки соединимы единственной геодезической.*

Для доказательства представим следующую специальную конструкцию. Пусть $A = (x^1, ..., x^n)$ - некоторая точка (на карте вокруг A_0). Через $B(t)$ обозначим точки $y^i = y^i(t, x^1, ..., x^n, z^1, ..., z^n)$ выходящей из A геодезической с вектором скорости $(z^1, ..., z^n)$ при $t = 0$ (т.е. в точке A). Условимся рассматривать $(z^1, ..., z^n)$ вблизи нулевого вектора $(0, ..., 0)$. Пусть $B = B(1)$, т.е. точка с координатами $y^i(1, x^1, ..., x^n, z^1, ..., z^n)$, $i = 1, ..., n$. По теореме о непрерывной зависимости решения $y^i = y^i(t)$ дифференциальных уравнений для геодезических от начальных условий ($A = (x^1, ..., x^n)$ и $v = (z^1, ..., z^n)$) точка B находится вблизи A.

Рассмотрим отображение:

$$(\underbrace{x^1,...,x^n}_{\text{A}};\underbrace{z^1,...,z^n}_{\text{v}}) \to (\underbrace{x^1,...,x^n}_{\text{A}};\underbrace{y^1,...,y^n}_{\text{B}})$$

Лемма 7.12. *Матрица Якоби этого отображения в точке* $(\underbrace{x_0^1,...,x_0^n}_{A};0,...,0)$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

□ Пользуемся гладкой зависимостью решения $B(t)$ от начальных условий A и v. В левом верхнем углу - еденичная матрица из членов $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}$. В левом нижнем - нулевая $\frac{\partial x^i}{\partial z^j}$ (координаты точки A от направляющего вектора $v = (z^1,..,z^n)$ не зависят). В правом верхнем углу - матрица E из членов $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ при $z^1 = ... = z^n = 0$ (так как $y^i = x^i$). В правом нижнем углу - матрица из членов $\frac{\partial y^i}{\partial z^j}$, она оказывается еденичной. Покажем это.

Рассмотрим, к примеру, $\frac{\partial y^1}{\partial z^1}, \frac{\partial y^2}{\partial z^1}..., \frac{\partial y^n}{\partial z^1}$. Чтобы получить эти частные производные, мы должны положить $z^2 = ... = z^n = 0$.

Имеем $(z^1, 0, ..., 0) = z^1 \cdot m_1$, поэтому $y^i(1; x^1, ..., x^n; z^1, 0, ..., 0)$ совпадает с $y^i(t; x^1, ..., x^n; \overbrace{1, 0, ..., 0}^{\text{m}_1})$ при $t = z^1$, т.е. с $y^i(z^1; x^1, ..., x^n; 1, 0, ..., 0)$. Значит, $\frac{\partial y^i}{\partial z^1} = \dot{y}^i$, $i = 1, ..., n$. Но при $v = m_1$ имеем $(\dot{y}^1, ..., \dot{y}^n) = (1, 0, ..., 0) = m_1$.

Аналогичным образом, $(\frac{\partial y^1}{\partial z^\alpha}, ..., \frac{\partial y^n}{\partial z^\alpha}) = m_\alpha = (0, ..., 1_\alpha, 0, ..., 0)$.

■

Так как матрица Якоби невырождена, отображение в окрестности точки A_0 (для малых векторов v) обратимо, т.е. для любой пары точек $(x^1, ..., x^n)$ и $(y^1, ..., y^n)$ вблизи A_0 найдётся вектор v, такой что выходящая из точки $(x^1, ..., x^n)$ геодезическая с вектором $v = \frac{dr}{dt} = (z^1, ..., z^n)$ пройдёт через точку $(y^1, ..., y^n)$. Единственность - следствие взаимной однозначности отображения.

Замечание. При фиксированной точке $A = A_0$ возникает диффеоморфное отображение $v = (z^1, ..., z^n) \to^{Exp} (y^1, ..., y^n) = B$, которое называется экспоненциальным. Образ шара $|v| \le \varepsilon$ (расположенного в касательном пространстве к M^n в точке A_0) называют геодезическим шаром, окружающим A_0 в M^n, он состоит из геодезических радиусов - выходящих из A_0 геодезических. Граница геодезического шара называется геодезической сферой.

7.11. Продолжаемость геодезических

Теорема существования обеспечивает для любой точки $A_0 \in M^n$ и любого касательного вектора v наличие проходящей через A_0 геодезической с вектором скорости v при $-\varepsilon \le s \le \varepsilon$, ε - некоторое положительное число. Многообразие называется геодезически полным, если всякая геодезическая продолжается по s от $-\infty$ до $+\infty$. Пример, когда это не так - открытый круг на плоскости.

Теорема 7.13. *Компактное многообразие M^n геодезически полно.*

Лемма 7.14. *Для точки $A_0 \in M^n$ найдётся такая окретсность U и такое число $\varepsilon > 0$, что для любой точки $A \in U$ и любого еденичного касательного вектора v в точке A проходящая через A геодезическая с вектором скорости v существует при $-\varepsilon \le s \le \varepsilon$.*

□ По теореме о непрерывной зависимости от начальных условий $(r(0) = A_0, r'_s(0) = v)$ решение $r(s)$ сущетсвует в пределах $-\varepsilon_v \le s \le \varepsilon_v$ не только для $r(0) = A_0$ и $r'_s(0) = v$, но и для начальных точек A в некоторой окрестности U_v точки A_0 и для векторов w в некоторой (конической формы) окрестности вектора v. Такие конические окрестности покроют сферическую поверхность, определяюмую концами v, а так как эта поверхность компактна, найдётся конечное покрытие, её покрывающее. Пусть $v_1, ..., v_N$ - соответсвующие векторы, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N$ - соответствующие числа, $U_1, ..., U_N$ - соответсвующие окрестности точки A_0. Тогда утверждение леммы верно для $U = \bigcap_i U_i$ и $\varepsilon = min_{1 \le i \le N}\{\varepsilon_i\}$ ■

Докажем теорему. Воспользуемся леммой: для $A \in M^n$ пусть U_A и ε_A - окрестность и число, фигурирующие в лемме. Из покрытия $\{U_A\}$ многообразия M^n выберем конечное: $U_1, ..., U_N$. Пусть $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N$ - соответствующие числа. Пусть $\varepsilon = min\{\varepsilon_i\}$. Тогда всякую геодезическую из любой точки M^n можно продолжить на ε. Повторяя этот процесс для любой отдельно выбранной геодезической, мы и продолжим её бесконечно в обе стороны.

Прежположим, что некоторая геодезическая, выходящая из точки A_0 (некомпактного) многообразия M^n, продолжаема только для всех $s < s_1 < \infty$. Пусть $K \subset M^n$ - содержащее A_0 компактное подмножество.

Теорема 7.15. *Существует $s_0 < s_1$ такое, что точки $r(s)$ геодезической при $s > s_0$ окажутся за пределами K $(s_0 < s < s_1)$.*

□ Так же, как в теореме, пусть $U_1, ..., U_N$ - покрывающие K окрестности, $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$, и $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N$ - соответствующие числа (обеспечиваемые леммой 7.13), и пусть $\varepsilon = min\{\varepsilon_i\}$. В этом случае выходящая из A_0

геодезическая за конечное число шагов длины ε продолжится до некоторой длины $s > s_1 - \varepsilon = s_0$. Ясно, что точка $r(s)$ должна находиться вне K: если бы $r(s) \in K$, то геодезическую можно было бы продолжить ещё на один ε-шаг, что невозможно ввиду того, что должно быть $s < s_1$. ■

7.12. Полугеодезические координаты на двумерной поверхности

Определение. Если метрика поверхности имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$, то координаты (u^1, u^2) называются *полугеодезическими* ($g_{22} = g_{22}(u^1, u^2)$).

Лемма 7.16. *В полугеодезических координатах u^1-линии являются геодезическими.*

□ Рассмотрим некоторую u^1-линию γ. Её параметр $s = u^1$ будет натуральным, так как при $u^2 = \mathrm{const}$ имеем $ds^2 = (du^1)^2$, то есть $ds = du^1$ и $|\dot\gamma| \equiv 1$. Нам нужно доказать, что $\frac{Dm_1}{du^1} = 0$. Поскольку $\frac{Dm_1}{du^1} = \nabla_{m_1} m_1 = \Gamma^\alpha_{11} m_\alpha$, то нужно доказать, что $\Gamma^\alpha_{11} = 0$ для $\forall\,\alpha$. Так как координаты полугеодезические, то $g_{11} = 1$ и $g_{12} = 0$, а значит, $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} = 0$. Тогда

$$\Gamma^\alpha_{11} = \frac{1}{2} g^{\alpha k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k}\right) = 0, \tag{21}$$

что и требовалось. ■

Теорема 7.17. *В окрестности любой точки поверхности существуют полугеодезические координаты.*

□ Проведём через точку A_0 произвольную гладкую линию $r(t) = (u^1(t), u^2(t))$. Введем новые координаты (v^1, v^2). В качестве v^2 возьмём параметр кривой t, а из каждой точки кривой вдоль вектора $n \perp \dot r$ пустим геодезическую. В качестве второй координаты v^1 возьмем натуральный параметр этих геодезических. Имеем $u^i = u^i(v^1, v^2) = u^i(s, t)$ - гладкие функции (гладкая зависимость решения геодезической от натурального параметра s и от начальных условий t). На самой кривой векторы $\frac{\partial r}{\partial t}$ и $\frac{\partial r}{\partial s}$ ортогональны, поэтому матрица Якоби $\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\}$ невырождена, так что (v^1, v^2) - новые координаты. Остаётся показать, что они полугеодезические. В самом деле, $g_{11} = 1$, так как параметр v^1 натуральный. Докажем, что $g_{12} = 0$. В любой точке кривой r координаты ортогональны, а значит на этой кривой $g_{12} = 0$. Так как $\frac{\partial g_{11}}{\partial v^i} = 0$, то

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v^1}\right) = g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1}. \tag{22}$$

Теперь заметим, что $\Gamma^\alpha_{11} = (\nabla_{m_1} m_1)^\alpha = 0$, так как v^1-линии геодезические. Значит, $g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = \Gamma^1_{11} = 0$. По формуле для обратной матрицы $g^{12} = -\frac{g_{12}}{\det G}$, откуда $\frac{g_{12}}{\det G}\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$. Тогда либо $g_{12} = 0$ и всё доказано, либо $\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$. Но в этом случае g_{12} не зависит от v^1, а поскольку на кривой r имеем $g_{12} = 0$, то $g_{12} \equiv 0$. ■

Следствие 7.18. *Любую геодезическую можно (локально) включить в полугеодезические координаты.*

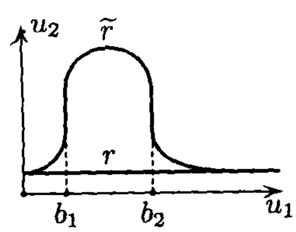
□ Проведем кривую, ортогональную этой геодезической. Через каждую точку на ней проведем ортогонально ещё геодезические, и таким образом получим нужные координаты. ■

7.13. Экстремальное свойство геодезических

А теперь докажем экстремальное (и пожалуй, главное) свойство геодезических линий.

Теорема 7.19. *Геодезическая локально кратчайшая.*

□



Рассмотрим геодезическую $r = r(u^1)$ и включим её, как указано выше, в полугеодезические координаты, тогда она будет некоторой u^1-линией. Рассмотрим другую кривую $\widetilde{r}$, проходящую через точку A на кривой r. Назовём точку $(u^1(s), u^2(s))$ на кривой $\tilde r$ *хорошей*, если $\frac{du^1}{ds} \neq 0$ - вблизи неё можно выразить u^2 через u^1, и *плохой* в противном случае (на рисунке b_1 и b_2 — плохие точки). На множестве хороших точек, представляя $\tilde{r}$ функцией $u^2 = u^2(u^1)$, получаем, что длина этого куска кривой будет равна

$$\int \sqrt{1 + g_{22}\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2} du^1, \tag{23}$$

в то время как длина геодезической для $u^2 = 0$ на хорошем участке будет равна $\int du^1$, т.е. меньше. Для геодезической плохих точек нет вообще, а длина кривой $\widetilde{r}$ по плохому множеству неотрицательна. Короче говоря, наличие плохих точек делает кривую ещё длиннее, а для хорошего множества у нас есть формула (23). ■

7.14. Параллельный перенос векторов на многообразиях

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^m_q$ — поверхность с индуцированной римановой метрикой.

Векторное поле v параллельно, если $\nabla_w v = 0$ для всех w. На самом деле достаточно выполнение этого условия для всех $w = m_i$, то есть достаточно, чтобы $\left(\nabla_{m_j} v\right)^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} X^i = 0$ — система из n^2 уравнений (здесь $v = (X^1, ..., X^n)$).

Определение. Пусть дано касательное к M^n векторное поле $v = v(t)$ вдоль кривой $r = r(t) \subset M^n \subset \mathbb{R}^m_q$. Оно называется *параллельным вдоль* $r(t)$, если $\frac{Dv}{dt} = 0$, т.е. $\frac{D^0 v}{dt} \perp TM$.

Пример. Возьмем геодезическую $r(s)$ и рассмотрим поле $v = \dot{r}$. Оно параллельно, так как по определению геодезической $\frac{Dv}{ds} = 0$.

Сформулируем некоторые свойства полей, параллельных вдоль кривой.

1° Если поле v параллельно, то λv тоже параллельно.

2° Определение параллельности не зависит от параметризации кривой, так как: $\frac{Dv}{d\tau} = \frac{Dv}{dt}\frac{dt}{d\tau} = 0 \cdot \frac{dt}{d\tau} = 0$, если $\frac{Dv}{dt} = 0$.

3° Если поля v_1 и v_2 параллельны, то поле $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ также параллельно.

Лемма 7.20. *Пусть векторные поля a и b параллельны по кривой $r(t)$. Тогда $(a, b) = \mathrm{const}$.*

□
$$\frac{d(a,b)}{dt} = \left(\frac{Da}{dt}, b\right) + \left(a, \frac{Db}{dt}\right) = (0, b) + (a, 0) = 0. \tag{24}$$

■

Следствие 7.21. *Если вектор a параллелен вдоль кривой, то вдоль неё он имеет постоянную длину.*

Следствие 7.22. *Если a и b параллельны, то угол между a и b постоянен, т. к.* $\frac{(a,b)}{|a||b|} = \cos(\angle(a, b)) = \mathrm{const}$.

Напишем уравнения параллельности векторного поля a вдоль кривой:

$$\left(\frac{Da}{dt}\right)^k = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot{x}^j = 0,\ k = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Фиксируем точку A_0 на кривой и вектор $a_0 = \left(X^1_0, \ldots, X^n_0\right)$ в этой точке. Тогда решение системы (25) с такими начальными условиями локально существует и единственно (в этой системе $\Gamma^k_{ij}(t)$ и $\dot{x}^j(t)$ - известные функции).

Определение. *Параллельным переносом* вектора a_0 по $r(t)$ называется параллельное поле $a(t)$, такое что $a(t_0) = a_0$.

Теорема 7.23. *Для вектора a_0 в точке A_0 существует, причём, единственный его параллельный перенос $a(t)$ вдоль $r(t)$.*

□ Из локального существования параллельного поля легко вывести его существование на произвольном участке кривой $r(t)$. В окрестности каждой точки решение соответствующей системы существует при любых начальных данных в точке, ср. с. п. 7.11, а из покрытия окрестностями участка $r(t)$ можно выделить конечное подпокрытие.

Покажем единственность. Пусть существует 2 решения a_1 и a_2, тогда у всех векторов $a_1(t)$ и $a_2(t)$ одинаковая длина и угол между ними. А в нулевой момент времени $|a_1| = |a_2| = |a_0|$, и угол между ними равен нулю. Следовательно, векторные поля a_1 и a_2 совпадают. ■

Так как система (25) однородна, то пернос линейной комбинации $a_0 = \sum_i \lambda_i a_{0i}$ равен линейной комбинации $a(t) = \sum a_i(t)$ переносов векторов a_{0i}. Таким образом, из точки A_0 вдоль $r^i(t)$ жёстким образом (без изменения длин и углов) переносится всё касательное пространство.

Рассмотрим локальный базис из касательных векторов m_i в некоторой точке A_0. Перенесём их параллельно вдоль кривой, получим векторы $\widetilde{m_i}, i = 1, ..., n$. При параллельном переносе вследствие сохранения углов базис перейдёт в базис. Разложим $a(t)$ по этим базисам: $a(t) = \widetilde{X}^i \widetilde{m}_i$.

Следствие 7.24. *Векторное поле $a(t)$ параллельно $\Leftrightarrow$ его координаты $(\widetilde{X}^1, \ldots, \widetilde{X}^n)$ в базисах $\{\widetilde{m}_i\}$ постоянны.*

Теперь дадим «внутреннее» определение ковариантной производной $\frac{D}{dt}$. Для этого введём следующее обозначение (оно будет использоваться и в дальнейшем). Рассмотрим касательное поле $a(t)$ на кривой, перенесем вектор $a(t+h)$ в точку t (назад) параллельно. Результат такого переноса будем обозначать через $a_h(t)$.

Теорема 7.25. *Имеет место равенство*

$$\frac{Da}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{a_h(t) - a(t)}{h}. \tag{26}$$

□ Пусть $\{\widetilde{m}_i\}$ — параллельный базис. Тогда $a = \widetilde{X}^i(t)\widetilde{m}_i$. Продифференцируем по правилу Лейбница:

$$\frac{Da}{dt} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{m}_i + \widetilde{X}^i \frac{D\widetilde{m}_i}{dt} = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{m}_i. \tag{27}$$

Второе слагаемое обратится в 0, так как базис $\{\widetilde{m}_i\}$ параллелен.

Теперь преобразуем правую часть. Имеем $a(t+h) = \widetilde{X}^i(t+h)\widetilde{m}_i$. В параллельном базисе координаты не меняются, следовательно, $a_h(t) = \widetilde{X}^i(t+h)\widetilde{m}_i$. Имеем в точке t:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{X}^i(t+h) - \widetilde{X}^i(t)}{h}\widetilde{m}_i = \frac{d\widetilde{X}^i}{dt}\widetilde{m}_i. \tag{28}$$

Получилось выражение для правой части требуемого равенства. Оно совпадает с (27) ■

7.15. Вращение векторного поля вдоль кривой

Рассмотрим двумерное многообразие $M \subset \mathbb{R}^m_q$ и кривую $r(t)$ на нём. Пусть также задано два векторных поля $a(t)$ и $\widetilde{a}(t)$ с векторами еденичной длины, и поле $\widetilde{a}(t)$ параллельно вдоль $r(t)$, причём $\tilde{a}(t_0) = a(t_0)$.

Выясним «физический смысл» производной $\frac{D}{dt}$. Обозначим через $\Delta\varphi$ величину изменения угла между параллельным полем и полем $a(t)$. Кроме того, считаем поверхность M ориенированной, так что $\triangle\varphi$ - величина со знаком, угол от $\tilde{a}(t)$ до $a(t)$, он же от $\tilde{a}(t_0)$ до $a_h(t_0)$.

Теорема 7.26. $|\dot{\varphi}| = \left|\frac{Da}{dt}\right|$.

□ Применяя обозначения предыдущего параграфа, имеем в точке $r(t_0)$:

$$\left|\frac{Da}{dt}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{a_h(t) - a(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{a_h(t) - a(t)}{\Delta\varphi}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\varphi}{h}\right|. \tag{29}$$

Первый множитель стремится к 1, так как это первый замечательный предел, а второй и есть $|\dot{\varphi}|$. ■

Таким образом, ковариантная производная — это скорость отклонения векторного поля от параллельного.

В каждой точке кривой выберем вектор $b \in TM$ такой, что $|b| = 1$, $b(t) \perp a(t)$ и пара (a, b) положительно ориентирована. Существование требуемого поля $b(t)$ очевидно. Поскольку поле $b(t)$ может быть получено процессом ортогонализации из $a(t)$ и любого неколлинеарного с $a(t)$ гладкого поля, $b(t)$ - гладкое поле. Имеем $|\dot{\varphi}| = \left|\frac{Da}{dt}\right|$, $\dot{\varphi} = \left(\frac{Da}{dt}, b\right) = \pm\left|\frac{Da}{dt}\right|$ (так как $|b| = 1$ и $\frac{Da}{dt} \perp a$, то $\frac{Da}{dt} \| b$). Получаем формулу для отклонения векторного поля от параллельного переноса $a(t_0)$:

$$\Delta\varphi = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{Da}{dt}, b\right)dt = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{D^0 a}{dt}, b\right)dt. \tag{30}$$

Последнее равенство следует из того, что $\frac{D^0 a}{dt} = \frac{Da}{dt} + a'$, где a' ортогонален поверхности, и при скалярном умножении на b получится 0. Заметим, что $\triangle\varphi$, выражаясь через внутреннее дифференцирование $\frac{D}{dt}$, не зависит от способа изометричного вложения M в $\mathbb{R}^m_q$. Одновременно имеем $\dot{\varphi} = (\frac{Da}{dt}, b) = (\frac{D^0 a}{dt}, b)$.

В частном случае, когда $t = s$ и $a(s) = \varepsilon_1(s)$, $\dot{\varepsilon}_1 = k_g b$ и $\Delta\varphi = \int\limits_{s_0}^{s} k_g ds$ - угол отклонения траектории от "прямого"движения.

7.16. Обнос вектора вдоль замкнутого контура

Пусть $r = r(t)$ - замкнутая кривая на поверхности, a - некоторый еденичный вектор, касающийся поверхности в точке $A_0 = r(t_0)$, $\tilde{a}$ - результат параллельноного переноса a после одного оборота, $\triangle\omega$ - угол от a до $\tilde{a}$. Считаем, что поверхность ориентирована. Положительным направлением обхода считаем то, для которого касательный вектор и вектор, направленный внутрь контура, имеют нужную ориентацию. Условимся рассматривать сравнительно малые контуры, ограничивающие некоторые области. Заметим, что (из соображений непрерывности) $\triangle\omega$ мало отличается от нуля для малых контуров.

Полезные наблюдения:

1. $\triangle\omega$ не зависит от выбора a в точке A_0, так как можно обнести всю касательную плоскость как жёсткое целое (см. п. 7.14)

2. $\triangle\omega$ не зависит и от выбора точки A_0, так как если после первого обхода перенести векторы a и $\tilde{a}$ дальше, в точку A_0', угол не изменится.

3. При смене направления обхода $\triangle\omega$ заменится на $-\triangle\omega$ (так как $\tilde{a}$ перейлёт в a). Поэтому раз и навсегда будем рассматриваить только положительные обходы.

4. $\triangle\omega$ не зависит от ориентации поверхности, ибо при смене ориентации хотя и изменяется направление отсчёта углов от вектора до вектора, но одновременно изменится на обратное и направление обхода контура.

Не нужно удивляться тому, что $\triangle\omega \neq 0$. Например, пусть a касается экватора. Так как экватор и меридианы - геодезические на сфере, то после обнесения a по экватору на угол $\frac{\pi}{2}$, затем до полюса по меридиану, а затем по другому меридиану в исходную точку, получим вектор $\tilde{a}$, направленный по меридиану, так что $\triangle\omega = \frac{\pi}{2}$.

Поскольку параллельный перенос определяется операцией внутреннего дифференцрования, $\triangle\omega$ - инвариант поверхности (не зависит от способа вложения M^n в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{R}^m_q$).

Теорема 7.27. *Сумма углов геодезического треугольника на* M^2 *равна* $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \triangle\omega$

$\square$ В самом деле, пусть α, β, γ - углы геодезического треугольника ABC, a - единичный вектор, касающийся дуги AB в точке a. При его параллельном обнесении по контуру треугольника (от A к B, затем к C и снова к A, считаем, что треугольник нужной ориентации) получился бы вектор $\tilde{a}$, с углом от a, равным $\triangle\omega$. Условимся, однако, что в точке B сделан разворот a на угол $\pi - \beta$, после которого вектор будет касаться BC. Аналогично в точке C сделаем разворот на углол $\pi - \gamma$, затем в точке A - на угол $\pi - \alpha$, в результате чего получим снова a, т.е. к $\triangle\omega$ добавились углы такие, что $\triangle\omega + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) + (\pi - \alpha) = 2\pi$ $\blacksquare$

Ясно что $\triangle\omega$ представляет значительный интерес. Попытаемся его вычислить.

Пусть $a(u^1, u^2)$ - произвольное (гладкое) продолжение вектора a в точке A_0 на весь контур такое, что $|a(t)| = 1$, b - ортогональное векторное поле нужной ориентации, $|b| = 1$.

Теорема 7.28. $\triangle\omega = -\oint(\frac{Da}{dt}, b)dt = -\oint(\frac{D^0 a}{dt}, b)dt$

Доказательство - следствие предыдущей формулы для $\triangle\varphi$. Знак минус объясняется тем, что $\triangle\varphi$ - угол от параллельного вектора $\tilde{a}$ до a, а $\triangle\omega$ - наоборот, угол от a до $\tilde{a}$.

Уточнение Строго говоря, равенство верно с точностью до $2\pi k$, ибо продолженное векторное поле $a(t)$ может по контуру совершить несколько полных оборотов, в то время как угол $\triangle\omega$ определён в пределах $\pm 2\pi$.

В частности, в качестве a в точке A_0 можно взять $\varepsilon_1 = \frac{dr}{ds}$, в качестве $a(t)$ - векторы ε_1 по всему контуру. В этом случае

$$\triangle\omega = -\oint k_g ds + 2\pi$$

или

$$\triangle\omega + \oint k_g ds = 2\pi$$

.

Появление 2π объясняется тем, что для малых контуров $\triangle\omega$ мало, в то время как интеграл, выражающий отклонение $\varepsilon_1(s) = \frac{dr}{ds}$ от параллельного переноса, близок к 2π.

7.17. Интегральная формула для угла отклонения результата обноса вектора по контуру

Напомню, что в качестве a в точке A_0 контура можно взять любой еденичный вектор. Пусть u^1, u^2 - криволинейные координаты в области M^2, содержащей контур, $m_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$. Пусть, например, $a = \frac{m_1}{|m_1|}$, b - веторные поля, получающиеся в результате процесса ортогонализации (и нормирования) полей m_1, m_2. Считаем, что $r(t) = (u^1(t), u^2(t))$.

Теорема 7.29. *Для ортонормированных векторных полей a и b положительной ориентации на содержащей контур карте u^1, u^2*

$$\triangle\omega = \int\int_S [(\frac{\partial a}{\partial u^1}\frac{\partial b}{\partial u^2}) - (\frac{\partial a}{\partial u^2}\frac{\partial b}{\partial u^1})]du^1du^2$$

□ Имеем

$$\frac{D^0 a}{dt} = \frac{\partial a}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial a}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt}$$

Следовательно, в силу предыдущего пункта

$$\triangle\omega = -\oint(\frac{D^0 a}{dt}, b)dt = -\oint[(\frac{\partial a}{\partial u^1}, b)du^1 + (\frac{\partial a}{\partial u^2}, b)du^2]$$

Применяя формулу Грина к ограниченной кривой области S, получаем

$$\triangle\omega = -\int\int_S [\frac{\partial}{\partial u^1}(\frac{\partial a}{\partial u^2}, b)du^1du^2 - \frac{\partial}{\partial u^2}(\frac{\partial a}{\partial u^1}, b)du^1du^2]$$

Этот переход можно объяснить и непосредственно. Например, $\int\int_S \frac{\partial}{\partial u^2}(\frac{\partial a}{\partial u^1}, b)du^1du^2$ после интегрирования по u^2 сводится к разности двух интегралов $\int(\frac{\partial a}{\partial u^1}, b)du^1$ - по верхней части границы контура и по нижней, оба - слева направо по переменной u^1. Меняя направление интегрирования на верхней дуге для положительности обхода, получаем, что указанная разность совпадает с $-\oint(\frac{\partial a}{\partial u^1}, b)du^1$. Аналогично для первого двойного интеграла.

После выполнения операций дифференцирования $\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}$ скалярных произведений получим окончательно формулу $\triangle\omega = \int\int_S [(\frac{\partial a}{\partial u^1}\frac{\partial b}{\partial u^2}) - (\frac{\partial a}{\partial u^2}\frac{\partial b}{\partial u^1})]du^1du^2$. Здесь учтено, что $\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1}$.
■

Далее получим формулу вида $\triangle\omega = \int\int_S K(A)d\sigma$, где K - функция от точек поверхности. Имеем $d\sigma = |[m_1, m_2]|du^1du^2 = \sqrt{|G|}du^1du^2$. Поделив и умножив на $\sqrt{|G|}$ подинтегральное выражение, получим $K(A) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}[(\frac{\partial a}{\partial u^1}\frac{\partial b}{\partial u^2}) - (\frac{\partial a}{\partial u^2}\frac{\partial b}{\partial u^1})]$.

Лемма 7.30. *Полученная функция $K(A)$ действительно является функцией точек поверхности т.е. не зависит ни от выбора криволинейных координат u^1, u^2, ни от выбора векторных полей a и b.*

□ Если у нас есть функции $K_1(A), K_2(A)$, и существует такая точка A, что $K_1(A) \neq K_2(A)$, тогда они не совпадают и в некоторой окрестности S этой точки. Тогда $\triangle\omega = \int\int_S K_1(A)d\sigma \neq \int\int_S K_2(A)d\sigma = \triangle\omega$, но $\triangle\omega$ - внутренний инвариант поверхности. Противоречие. ■

В соответствии с концом предыдущего пункта получаем так называемую формулу Гаусса-Бонне

$$\int\int_S K d\sigma + \oint k_g ds = 2\pi$$

.

7.18. Критерий евклидовости двумерной поверхности

Функцию $K(A)$ естественно называть функцией кривизны поверхности в её точках.

Теорема 7.31. $K(A) = 0$ *в области поверхности в точности тогда, когда поверхность изометрична евклидовой плоскости.*

□ Если поверхность изометрична евклидовой плостқости, то $\triangle\omega = 0$ по любым контурам, поэтому в силу интегральной формулы $K(A) = 0$.

Пусть $K(A) = 0$ в области M^2. В этом случае из $\triangle\omega = 0$ заключаем легко, что параллельный перенос векторов из точки в точку не зависит от путей переноса.

Фиксируем некоторую точку A, проведём через неё любую геодезическую $r = r(t)$ с натуральным параметром t, и при каждом t проведём в обе стороны ортогональные геодезические с параметром σ вдоль них. Получим вокруг A полугеодезические координаты σ, t (п. 7.12), в которых поверхность представляется как $r = r(\sigma, t)$, причём $ds^2 = (d\sigma)^2 + g(dt)^2$. Достаточно показать, что $g = g(\sigma, t) = 1$ при всех σ (не только при $\sigma = 0$).

Пусть $a(\sigma, t) = e_1 = \frac{\partial r}{\partial \sigma}$, $|a| = 1$.

Лемма 7.32. *Поле $a = e_1$ параллельно по области координат (σ, t).*

□

Учитывая, что результат переноса не зависит от пути, перенесём a из точки A_1 в A_2 следующим образом: сперва по σ до $\sigma = 0$, т.е. в точку кривой $r(t)$, затем по $r(t)$ до пересечения с $r(t)$ геодезической σ-линии из точки A_2, затем по этой линии до A_2. Поскольку перенос осуществлялся по участкам геодезических и $a \perp \dot{r}$ при $\sigma = 0$, в результате переноса получим $a = \frac{\partial r}{\partial \sigma}$ в точке A_2. Это означает параллельность $a = a(\sigma, t)$. ■

Поскольку к точке A_2 можно подойти по кривой с любым наперед заданным вектором w, то $\nabla_w a = 0$ (во всех точках).

Пусть $e_2 = \frac{\partial r}{\partial t}$. Имеем $\frac{De_2}{d\sigma} = \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = 0$, т.е. e_2 параллельно по σ и его длина не изменяется, но при $\sigma = 0$ имеем $|e_2| = 1$. Тем самым $g = (e_2, e_2) = 1$.

■

7.19. Случай поверхности в $\mathbb{R}^3$. Инвариантность гауссовой кривизны

Теорема 7.33. *В случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ функция $K(A)$ совпадает с гауссовой кривизной.*

□ Пользуемся формулой для $K(A)$, п. 7.17. Вычислим функцию K в каждой точке A. Сдвинем начало координат в точку A и повернём координаты так, что плоскость xOy станет касательной, а направления Ox и Oy - главными. Тогда поверхность можно задать как $z = f(u^1, u^2)$, где $u^1 = x$, $u^2 = y$. Вычислим функцию $K(A)$ в точке $A = (0, 0)$. Имеем $m_1 = (1, 0, f'_x)$, $m_2 = (0, 1, f'_y)$. Поскольку плоскость xOy касается поверхности, то $f'_x = f'_y = 0$ и $detG = 1$. Теперь выберем векторные поля. Положим

$$a = \frac{m_1}{|m_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}(1, 0, f'_x),$$

а векторное поле b получим с помощью ортогонализации векторов m_1, m_2.

Приступим к вычислению $K(A)$. Поскольку $f'_x(A) = 0$, а $f''_{xx}(A) = \lambda_1$ (см. п. 3.5), имеем

$$\frac{\partial a}{\partial u^1} = \frac{\partial a}{\partial x} = (\frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}})'_x \cdot (1, 0, f'_x) + \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}(0, 0, f''_{xx}) = (0, 0, f''_{xx}) = (0, 0, \lambda_1).$$

Так как направления Ox и Oy главные, то $f''_{xy} = 0$ (см. п. 3.5). Имеем

$$\frac{\partial a}{\partial u^2} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0 + \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}(0, 0, f''_{xy}) = 0 \Rightarrow (\frac{\partial a}{\partial u^2}, \frac{\partial b}{\partial u^1}) = 0.$$

Остаётся найти третью координату ветора $\frac{\partial b}{\partial y}$. Имеем $b = \alpha m_1 + \beta m_2$, где α и β - функции, зависящие от точки. Имеем

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \alpha'_y m_1 + \alpha \frac{\partial m_1}{\partial y} + \beta'_y m_2 + \beta \frac{\partial m_2}{\partial y}.$$

В этом равенстве в точке A координаты z у векторов m_1 и m_2 нулевые. Кроме того, $\frac{\partial m_1}{\partial y} = 0$, так как в точке A направления Ox и Oy главные и $f''_{xy} = 0$. Следовательно $\frac{\partial b}{\partial y}(A) = \beta(*, *, f''_{yy}) = \beta(*, *, \lambda_2)$. Найдём коэффициент β: в точке A имеем $b = m_2$, поэтому $\beta(A) = 1$. Значит, $\frac{\partial b}{\partial y} = (*, *, \lambda_2)$. Таким образом, $K(A) = \lambda_1 \lambda_2 = K$. ■

Следствия.

1. Гауссова кривизна K - внутренний инвариант поверхности M (не зависит от способа вложения $M \subset \mathbb{R}^3$, хотя главные кривизны λ_1, λ_2 этим свойством не обладают). Для поверхностей, изометричных плоскости (и только для них, см. п. 7.18), $K = 0$.

2. Для поверхностей, у которых $K = K(A) = const$, $\triangle\omega = k\sigma$, где σ - площадь внутри контура.

3. На сфере радиуса 1 имеем $K = 1$, поэтому сумма углов геодезического треугольника есть $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \sigma$.

   Для плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ имеем $K = -1$ (см. п. 6.6), и на ней $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi - \sigma$.

4. При обходе по замкнутому контуру на сфере радиуса 1 в силу формулы Гаусса-Бонне касательный вектор повернётся на угол $\triangle\varphi = \oint k_g ds = 2\pi - \sigma$. Чем больше радиус обхода, тем меньше $\triangle\varphi$. На экваторе $\sigma = 2\pi$ и $\triangle\varphi = 0$ - движение по экватору прямое.

   На плоскости Лобачевского $\mathbb{L}^2$ при аналогичных обходах $\triangle\varphi = 2\pi + \sigma$. Чем больше радиус обхода, тем больше окажется вращение касательного вектора за один обход.

8. Добавление: о комплексных структурах на поверхностях

Определение. Пусть нам задана поверхность и две системы координат (две карты): (u^1, u^2) и (v^1, v^2). Сопоставим координатам (u^1, u^2) число $z := u^1 + iu^2 \in \mathbb{C}$, а координатам (v^1, v^2) — число $w := v^1 + iv^2 \in \mathbb{C}$. Говорят, что преобразования координат $u^i = u^i(v^1, v^2)$ (и обратные) являются комплексными, если оба являются овеществлением взаимно обратных комплексных дифференцируемых отображений $z = F(w)$, $w = \Phi(z)$. Говорят, что на поверхности задана комплексная структура, если задан атлас из карт с комплексными преобразованиями координат на любых пересечениях карт атласа.

Аналогичным образом определяются аналитические структуры (преобразования координат аналитичны), топологические (преобразования - гомеоморфизмы) и некоторые другие.

Теорема 8.1. *На сфере S^2 существует комплексная структура.*

□ Осуществим стереографическую проекцию сферы из южного и северного полюсов S и N соответственно. Пусть $A' = (x', y')$ - проекция точки A из северного полюса, и $A'' = (x'', -y'')$ - проекция из южного полюса (здесь знак "минус"взят для удобства). Пусть $z = x' + iy'$ и $w = x'' + iy''$.

Заметим, что если $\rho = OA'$ и $\widetilde{\rho} = OA''$, то $\rho\widetilde{\rho} = 1$. В самом деле, $\frac{\widetilde{\rho}}{1} = \frac{OA''}{OS} = \frac{ON}{OA'} = \frac{1}{\rho}$ (см. п. 6.5).

Следовательно, $zw = 1$, так как $|z||w| = \rho\widetilde{\rho} = 1$, а аргументы у них противоположные, то есть $arg(zw) = 0$. Следовательно, $z = \frac{1}{w}$, и на $\mathbb{S}^2$ удалось ввести комплексную структуру (пересечение карт - дополнение к полюсам). ■

Комплексная структура на $\mathbb{S}^2$ связана с метрикой. В комплексной форме метрика сферы имеет вид

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}$$

Выразим x и y через z и $\bar{z}$. Имеем $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Тогда $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$. Если в этой метрике подставить $z = \frac{1}{w}$, то получим $ds^2 = \frac{4dwd\bar{w}}{(1+w\bar{w})^2}$, т.е. на общей части двух карт $\mathbb{S}^2$ запись метрики оказывается инвариантной при замене координат.

Под дифференцируемым преобразованием координат на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ понимается функция $w = w(z)$, имеюшая дифференциал $dw = \frac{dw}{dz}dz$ в точках её определения. Если представить w как $w = u + iv$ и z как $z = x + iy$, то окажется, что при овеществлении интересующее нас комплесное преобразование превратится в гладкое (и даже аналитическое) вида $u = u(x, y), v = v(x, y)$.

Это следует из того, что $u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$, $v = \frac{1}{2}(w - \bar{w})$ - линейные (следовательно - дифференцируемые) замены, w (и $\bar{w}$) - функции от z (и $\bar{z}$), и, наконец, $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ (аналитичность $u(x, y)$ и $v(x, y)$ доказывается в комплексном анализе). Таким образом, наличие на поверхности комплексной структуры автоматически обеспечивает наличие вещественной аналитической структуры.

Функции $u(x, y), v(x, y)$ удовлетворяют следующему условию Коши-Римана:
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Для этого используем обозначение $\frac{dw}{dz} = c = a + ib$. Имеем $dw = cdz = (a + ib)(dx + idy) = (adx - bdy) + i(bdx + ady)$.

С другой стороны $dw = du + idv = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)$.

Условия Коши-Римана вытекают из сравнения в обоих выражениях коэффициентов при dz, dy, idx, idy.

Теорема 8.2. *Пусть Γ - поврехность в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, являющаяся графиком комплексной аналитической функции $w = w(z)$. Эта поврехность допускает комплексную структуру. На Γ из $\mathbb{R}^4$ индуцируется конформно-евклидова мтерика, допускающая комплексную запись $ds^2 = (1 + w'_z\bar{w}'_z)dzd\bar{z}$.*

Под Γ понимается множество точек $(z, w(z)) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$

□ Области в $\mathbb{C}$, содержащиеся в области определения $w(z)$, задают на Γ комплексный атлас, поэтому Γ имеет комплексную структуру.

Имеем $z = x + iy, w = u + iv$. Поверхность Γ описывается точками $(x, y, u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^4$.

Касательные векторы имеют вид $m_1 = (1, 0, u'_x, v'_x)$, $m_2 = (0, 1, u'_y, v'_y)$. Имеем $g_{11} = (m_1, m_1) = 1 + u'^2_x + v'^2_x$, $g_{22} = (m_2, m_2) = 1 + u'^2_y + v'^2_y = g_{11}$ - в силу условий Коши-Римана. В силу этих же условий $g_{12} = (m_1, m_2) = 0$. В итоге $ds^2 = (1 + u'^2_x + v'^2_x)(dx^2 + dy^2)$.

С другой стороны скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ записывается как $(a, b) = z\bar{z}_1 + w\bar{w}_1$ $(a = (z, w), b = (z_1, w_1)$. В частности, скалярный квадрат векторв $(dz, w'_zdz) = dr$ записывается как $dzd\bar{z} + w'_z\bar{w}'_zdzd\bar{z} = (1 + w'_z\bar{w}'_z)dzd\bar{z} = (dr, dr) = ds^2$, т.е. $ds^2 = (1 + w'_z\bar{w}'_z)dzd\bar{z} = 1 + |w'_z|^2dzd\bar{z}$, $dzd\bar{z} = dx^2 + dy^2$ $(dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy)$.

В качестве следствия из сопоставлений двух выражения для ds^2 получаем $|w'_z|^2 = w'_z\bar{w}'_z = u'^2_x + v'^2_y$. ■

Предыдущая теорема имеет множество различных обобщений. Рассмотрим одно из них.

Пусть $P(z)$ - многочлен степени n на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющий все корни кратности 1, и Γ - множество точек (z,w) в $\mathbb{C}\times\mathbb{C}=\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$, удовлетворяющих уравнению $w^q=P(z)$, где q - некоторое натуральное число.

Теорема 8.3. *Множество Γ - поверхность с комплексной структурой на ней.*

$\Box$ Комплексный градиент функции $F(z,w)=w^q-P(z)$ есть $(\frac{\partial F}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial w})=(-P'_z,qw^{q-1})$. Он отличен от нулевого $(0,0)$: при $w=0$ также $P(z)=0$, поэтому $P'_z\neq 0$ (используем однократность корней). Таким образом, при $w\neq 0$ по теореме о неявноых функциях (в её комлексном варианте) локально $w=f(z)$, а в точках Γ, где $P'_z\neq 0$, по тем же причинам $z=z(w)$. В тех точках, где определены обе функции f и g, они взаимно обратны. Теорема - следствие предыдущей. $\blacksquare$

Рассмотрим вложение $\mathbb{C}\subset S^2$, определяемое первой (из двух) стереографической проекцией. Так как оно определяет (вместе, конечно, со второй проекцией) на S^2 комплексную структуру, определено сохраняющее комплексные структуры многообразий включение $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}\times\mathbb{C}\subset S^2\times S^2$. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ - замыкание образа рассмотренной выше поверхности $\Gamma\subset\mathbb{C}^2$ в $S^2\times S^2$ (состоящее, очевидно, из пополненного точкой $(\infty,\infty)\in S^2\times S^2$ множества Γ: при конечных z координата w конечна, а при $z\to\infty$ также $w\to\infty$).

Теорема 8.4. *Поверхность $\widetilde{\Gamma}$ компактна, но имеет особенность в точке (∞,∞). При чётном $n=2k$ и $q=2$ в окрестности этой точки она состоит их двух обычных карт, скленнных в точке. Поверхность всюду допускает комплексную структуру, и из $S^2\times S^2$ на ней индуцируется конформно-евклидова метрика.*

$\Box$ Компактность $\widetilde{\Gamma}$ - следствие замкнутости в компактном множестве $S^2\times S^2$. При $z\to\infty$ соответствующая точка на S^2 (при первой стереографической проекции) стремится к "северному полюсу"N сферы. Поэтому для изучения поведения $\widetilde{r}$ вблизи (∞,∞) следует рассматривать коодинаты вторых стереографических карт. В окрестности этой точки $w=\pm\sqrt{P(z)}$ (при $q=2$), $P(z)\neq 0$, поэтому $\widetilde{\Gamma}$ имеет вблизи N две ветви. Так как при $z\to\infty$ и $w\to\infty$, то обе ветви в точке N соприкасаются. Переходя от (z,w) к координатам $(\frac{1}{\tilde{z}},\frac{1}{\tilde{w}})$, зависимость между новыми координатами получим в виде $\tilde{w}^2=\pm\frac{\tilde{z}^n}{Q(\tilde{z})}$, где $Q(\tilde{z})=z^nP(\frac{1}{z^n})$, $\tilde{w}=\pm\frac{\tilde{z}^k}{\sqrt{Q(\tilde{z})}}$ при чётном $n=2k$. Заметим что $Q(0)\neq 0$, поэтому $\tilde{z}=0$ в области определения $\tilde{w}=\tilde{w}(\tilde{z})$ и $\tilde{w}(0)=0$ (причём (0,0) - новые координаты N).

Комплексная структура в точках $\widetilde{\Gamma}$, отличных от $N=(\infty,\infty)$ - следствие теоремы 8.3, поскольку $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\subset S^2\times S^2$ - комплексный диффеоморфизм на $S^2\times S^2\setminus(\infty,\infty)$. Наличие комплексной структуры на каждой из ветвей вблизи $N=(\infty,\infty)$ - следствие тех же аргументов, если использовать вложение $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\subset S^2\times S^2$, определяемое вторыми стереографическими картами.

Метрика в $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ записывается как $ds^2=dzd\bar{z}+dwd\bar{w}$. В стереографических координатах на $S^2\times S^2$ (определяемыми первыми стереографическими проекциями) метрика $S^2\times S^2$ имеет вид $ds^2=4(\frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}+\frac{dwd\bar{w}}{(1+w\bar{w})^2})$ (см. теорему 8.1).

Как было отмечено выше, в точках Γ локально $w=f(z)$ либо $z=g(w)$. Подставляя любое из этих соотношений в выражение для ds^2, получим либо $ds^2=\Phi(z,\bar{z})dzd\bar{z}$, либо $ds^2=\widetilde{\Phi}(w,\bar{w})dwd\bar{w}$ - конформный вид метрики. Эти же аргументы применимы и к ветвям вблизи точки $N=(\infty,\infty)$, если координаты на $S^2\times S^2$ задать вторыми стереографическими проекциями сфер S^2 - множителей $S^2\times S^2$.

$\blacksquare$

Замечание. При $q=2$ и $n=2k$, сохраняя на картах комплексную структуру, компактную поверхность $\widetilde{\Gamma}$ можно мысленно освободить от склейки в точке (∞,∞), объявив скленные карты различными. Получим обычную поврехность (двумерное многообразие) с комплексной структурой и конформно-евклидовой метрикой на ней. Оказывается, таким образом может быть получена поверхность, гомеоморфная любой наперёд заданной ориентируемой компактной поверхности (см. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, Современная геометрия, Москва, "Наука" ,1986, часть II, п.2. в §4 главы 1, или А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Физматлит, 2004, п. 4.6). Тем самым любое двумерное компактное ориентируемое многообразие допускает комплексную структуру и конформно-евклидову метрику.